

# ПРИБОРЫ И МЕТОДЫ ИЗМЕРЕНИЯ DEVICES AND METHODS OF MEASURING

УДК 630

doi: 10.21685/2307-5538-2024-1-5

## ОПТИМИЗАЦИЯ НАЗЕМНОГО ФОТОМЕТРИЧЕСКОГО МЕТОДА ИЗМЕРЕНИЯ ИНДЕКСА ЛИСТОВОЙ ПЛОЩАДИ РАСТИТЕЛЬНОСТИ

Ф. Г. Агаев<sup>1</sup>, М. Э. Омаров<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup> Институт космических исследований природных ресурсов  
Национального аэрокосмического агентства, Баку, Азербайджанская Республика

<sup>1</sup> director.tekti@mail.ru, <sup>2</sup> meracomarov@gmail.com

**Аннотация.** *Актуальность и цели.* Сформирована задача оптимизации наземных измерений индекса листовой площади с учетом изменения зенитного угла Солнца в течение восхода и захода в противоположном порядке. *Материалы и методы.* Предложена среднеинтегральная модификации индекса LAI в виде некоторого функционала. *Результаты и выводы.* Определено, что предложенный функционал с учетом введенного ограничительного условия имеет экстремали в виде функциональных зависимостей поступающей оптической радиации и проходящей через крону растительности оптической радиации от зенитного угла Солнца. Показано, что первый из этих экстремалей обеспечивает максимум целевого функционала а второй минимум.

**Ключевые слова:** фотометрические измерения, валидация, индекс листовой площади, зенитный угол Солнца, оптическая радиация

**Для цитирования:** Агаев Ф. Г., Омаров М. Э. Оптимизация наземного фотометрического метода измерения индекса листовой площади растительности // Измерение. Мониторинг. Управление. Контроль. 2024. № 1. С. 40–46. doi: 10.21685/2307-5538-2024-1-5

## OPTIMIZATION OF GROUND PHOTOMETRIC METHOD OF MEASUREMENT OF VEGETATION LEAF AREA INDEX

F.G. Agaev<sup>1</sup>, M.E. Omarov<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup> Institute of Space Research of Natural Resources  
of National Aerospace Agency, Baku, Azerbaijan Republic

<sup>1</sup> director.tekti@mail.ru, <sup>2</sup> meracomarov@gmail.com

**Abstract.** *Background.* In the article, the problem of optimizing ground measurements of the sheet area index was formed taking into account the change in the Solz zenith angle during sunrise and approach in the opposite order. *Materials and methods.* A mid-integral modification of the LAI index in the form of some functionality is proposed. *Results and conclusions.* It is determined that the proposed functionality, taking into account the introduced limiting condition, has extremals in the form of functional dependencies of incoming optical radiation and optical radiation passing through the vegetation crown from the zenith angle of the Sun. It is shown that the first of these extremals provides the maximum target functionality and the second minimum.

**Keywords:** photometric measurements, validation, leaf area index, zenith angle of the Sun, optical radiation

**For citation:** Agaev F.G., Omarov M.E. Optimization of ground photometric method of measurement of vegetation leaf area index. *Izmerenie. Monitoring. Upravlenie. Kontrol' = Measuring. Monitoring. Management. Control.* 2024;(1): 40–46. (In Russ.). doi: 10.21685/2307-5538-2024-1-5

### Введение

Индекс листовой площади (LAI) определяется в качестве суммы односторонних площадей листьев, приходящейся на некоторую фиксированную площадь земли, и рассматривается в качестве основного биофизического параметра, влияющего на такие процессы, как фотосинтез, транспирация и энергобаланс на поверхности земли [1, 2]. Данные об индексе LAI изучались в таких космических проектах, как MODIS, POLDER, GLOBCARBON, CYCLOPS [3]. Для валидации космических данных, касающихся LAI, исследования по проведению наземных проксимальных измерений осуществлялись во многих научных центрах США, Канады и Европы [4, 5].

В целом методы измерения LAI делятся на прямые и косвенные методы. В прямом методе осуществляется измерение площадей листьев, приходящихся на некоторую фиксированную площадь земной поверхности. При этом существуют планиметрический и гравиметрический подход к реализации этого метода [6, 7].

Что касается косвенных методов, то согласно статье [6] эти методы разделяются на контактные и неконтактные. Контактные методы базируются на установлении связи этого индекса с измеряемыми аллометрическими показателями растений [1, 6]. Неконтактные косвенные методы основываются на измерении оптической радиации, поступающей на крону растения и прошедшей через нее. В этом отношении наиболее показателен измерительный эксперимент, суть которого подробно изложена в работе [7] и заключается в следующем. Под кроной растения были установлены 15 сенсоров для измерения фотосинтетически активной радиации (PAR).

Для вычисления поглощенной части PAR (FAPAR) использовалась формула

$$FAPAR = \frac{PAR_{in} - PAR_{out} - PAR_t}{PAR_{in}}, \quad (1)$$

где  $PAR_{in}$  – входящая PAR;  $PAR_{out}$  – отраженная часть  $PAR_{in}$ ;  $PAR_t$  – прошедшая через крону растения PAR, зависящая от зенитного угла Солнца.

Индекс LAI определялся по формуле [8]

$$LAI = \frac{-\ln\left(\frac{PAR_t}{PAR_{in}}\right)}{k}, \quad (2)$$

где  $k$  – коэффициент ослабления, определяемый по формуле

$$k(\theta) = \frac{\sqrt{x^2 + \tan(x)^2}}{x + 1,774(x + 1,182) - 0,733}, \quad (3)$$

где показатель  $x$  является функцией распределения угла эллипсоидальных листьев.

Вместе с тем, согласно работе [7], вышеуказанная методика была опробована в течение ограниченного интервала времени дня, между 10.00 и 14.00. Между тем зенитный угол  $\theta$  изменяется как в процессе восхода, так и захода солнца, что дает все основания полагать наличие экстремума в функции временной зависимости  $k(t)$ . В течение восхода Солнца зенитный угол уменьшается, следовательно, в соответствии с формулой (3) уменьшается и  $k(\theta)$ . Следовательно, определенный интерес представляет следующий вопрос: в какое время суток следует осуществлять измерение LAI и какова разница между результатами измерений, проведенных в течение восхода и захода Солнца. Далее изложены результаты проведенных исследований авторов данной работы, посвященной указанному вопросу.

### Материалы и методы

Прежде всего отметим, что в течение проведенных исследований использовали среднеинтегральную модель  $LAI_{cp}$ , определяемую как

$$LAI_{cp} = \frac{1}{k(\theta)_{max} - k(\theta)_{min}} \int_{k_{min}}^{k_{max}} \frac{\ln(PAR_{in} / PAR_t)}{k(\theta)} dk. \quad (4)$$

Далее с учетом зависимости (3), а также очевидной функциональной зависимости  $PAR_{in}$  от  $\theta$  была введена функция

$$PAR_{in} = \varphi(k(\theta)) \quad (5)$$

или просто

$$PAR_{in} = f_1(k). \quad (6)$$

Была поставлена задача определения такого вида функции  $f(k)$ , при которой  $LAI_{cp}$  достиг бы экстремальной величины.

Также была сформулирована альтернативная задача, заключающаяся в поиске такой функциональной зависимости

$$PAR_t = f_2(k), \quad (7)$$

при которой  $LAI_{cp}$  достиг бы экстремальной величины.

Для решения вышеуказанных задач на искомые функции  $f_1(k)$  и  $f_2(k)$  были наложены следующие ограничительные условия:

$$\int_{k_{min}}^{k_{max}} f_1(k) dk = C_1; C_1 = \text{const}; \quad (8)$$

$$\int_{k_{min}}^{k_{max}} f_2(k) dk = C_2; C_2 = \text{const}. \quad (9)$$

Геометрическая интерпретация условий (8) и (9) показана на рис. 1, где группа кривых, обозначенных цифрой 1, соответствует измерительному эксперименту, проводимому при заходе Солнца, когда уменьшаются  $f_1(k)$  и  $f_2(k)$  с ростом  $\theta$  и  $k(\theta)$ . Группа кривых, обозначенная цифрой 2, соответствует случаю проведения измерительного эксперимента в течение восхода Солнца.

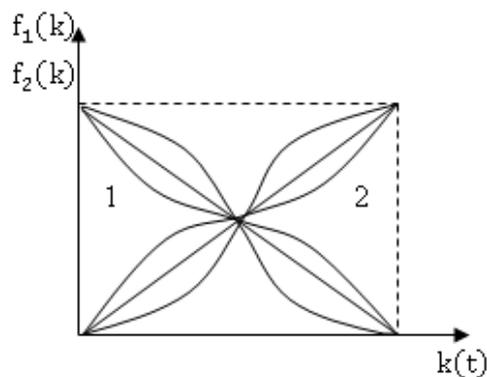


Рис. 1. Схематическая интерпретация ограничительных условий (8) и (9)

Рассмотрим процедуру решения первой сформулированной задачи. Для упрощения записи далее коэффициенты ослабления будем обозначать как  $k$ . С учетом уравнений (4) и (5) целевой функционал  $F_1$  решаемой оптимизационной задачи определим как

$$F_1 = \frac{1}{k_{max} - k_{min}} \int_{k_{min}}^{k_{max}} \frac{\ln(f_1(k) / PAR_t)}{k} dk. \quad (10)$$

С учетом формул (8) и (10) составим целевой функционал  $F_{10}$  безусловной вариационной оптимизации:

$$F_{10} = \frac{1}{k_{\max} - k_{\min}} \int_{k_{\min}}^{k_{\max}} \frac{\ln(f_1(k) / PAR_t)}{k} dk + \lambda_1 \left[ \int_{k_{\min}}^{k_{\max}} f_1(k) dk - C_1 \right], \quad (11)$$

где  $\lambda_1$  – множитель Лагранжа.

Согласно уравнению Эйлера – Лагранжа решение задачи (11) должно удовлетворить условию [8]

$$\frac{d \left\{ \frac{\ln(f_1(k) / PAR_t)}{k(k_{\max} - k_{\min})} + \lambda_1 f_1(k) \right\}}{df_1(k)} = 0. \quad (12)$$

Из условия (12) находим

$$\frac{1}{f_1(k)k(k_{\max} - k_{\min})} + \lambda_1 = 0. \quad (13)$$

Из уравнения (13) получаем

$$f_1(k) = -\frac{1}{\lambda_1 k(k_{\max} - k_{\min})}. \quad (14)$$

Для вычисления воспользуемся выражениями (8) и (14), имеем

$$-\frac{1}{\lambda_1} \int_{k_{\min}}^{k_{\max}} \frac{dk}{k(k_{\max} - k_{\min})} = C_1. \quad (15)$$

Из уравнения (15) находим

$$\lambda_1 = -\frac{1}{C_1 \Delta k} \ln \left( \frac{k_{\max}}{k_{\min}} \right), \quad (16)$$

где  $\Delta k = k_{\max} - k_{\min}$ .

С учетом выражений (14) и (16) получим

$$f_1(k) = \frac{C_1}{k \ln \left( \frac{k_{\max}}{k_{\min}} \right)}. \quad (17)$$

Таким образом, при  $f_1(k)$  в виде (17) функционал  $F_{10}$  достигает экстремума. При этом решение (17) приводит  $F_{10}$  к максимуму, так как проверка по знаку второй производной подынтегрального выражения (11) по искомой функции показывает, что экстремум является максимумом. Указанный максимум с учетом (10) и (17) вычисляется как

$$F_1 = \frac{1}{k \Delta k} \int_{k_{\min}}^{k_{\max}} \ln \left[ \frac{C}{k \ln \left( \frac{k_{\max}}{k_{\min}} \right) PAR_t} \right] dk. \quad (18)$$

Рассмотрим решение второй сформулированной задачи.

С учетом уравнений (4) и (7) сформируем следующий целевой функционал задачи оптимизации

$$F_1 = \frac{1}{k_{\max} - k_{\min}} \int_{k_{\min}}^{k_{\max}} \frac{1}{k} \ln \left[ \frac{PAR_{in}}{f_2(k)} \right] dk + \lambda_2 \left[ \int_{k_{\min}}^{k_{\max}} f_2(k) dk - C_2 \right], \quad (19)$$

где  $\lambda_1$  – множитель Лагранжа.

Согласно уравнению Эйлера – Лагранжа решение уравнения (19) должно удовлетворить условию (8)

$$-\frac{1}{(k_{\max} - k_{\min})kf_2(k)} + \lambda_2 = 0. \quad (20)$$

Из выражения (20) находим

$$f_2(k) = \frac{1}{\lambda_2(k_{\max} - k_{\min})k}. \quad (21)$$

С учетом выражений (9) и (21) получим

$$\frac{1}{\Delta k \lambda_2} \int_{k_{\min}}^{k_{\max}} \frac{dk}{k} = C_2. \quad (22)$$

Из выражения (22) имеем

$$\lambda_2 = \frac{1}{C_2 \Delta k} \int_{k_{\min}}^{k_{\max}} \frac{dk}{k} = \frac{\ln \left( \frac{k_{\max}}{k_{\min}} \right)}{C_2 \Delta k}. \quad (23)$$

С учетом выражений (21) и (23) находим

$$f_2(k) = \frac{C_2}{k \ln \left( \frac{k_{\max}}{k_{\min}} \right)}. \quad (24)$$

Таким образом, решение уравнения (24) обеспечивает экстремум функционала (19).

### Обсуждение

Сравнивая решения (17) и (24), нетрудно увидеть, что они отличаются только величиной постоянных фигурирующих в числителе.

Однако в отличие от решения (17) выражение (24) приводит функционал (19) к минимуму. Чтобы убедиться в этом, достаточно вычислить вторую производную подынтегрального выражения функционала (19) и убедиться, что результат имеет положительный знак.

Таким образом, несмотря на то, что группа кривых 1 на рис. 1 качественно характеризует экстремали целевых функционалов рассматриваемых двух задач, в первой задаче эти кривые обеспечивают максимум функционала, а во втором случае – минимум.

### Заключение

Сформулирована и решена задача оптимизации наземных проксимальных измерений индекса листовой площади. Исследованы экстремальные свойства предложенной среднеинтегральной модификации индекса  $LAI$ , в которой учитывается факт изменения зенитного угла в течение восхода и захода Солнца в противоположном порядке. Показано, что существуют экстремали в виде вновь введенных функциональных зависимостей поступающей оптической радиации и проходящей через растительность оптической радиации от зенитного угла Солнца. Однако в первом случае вычисленный экстремаль обеспечивает максимум целевого функционала в виде среднеинтегральной оценки  $LAI$ , а во втором случае – минимум.

**Список литературы**

1. Breda N. J. J. Ground-based measurements of leaf area index: a review of methods, instruments and current controversies // *Journal of experimental botany*. 2003. Vol. 54. P. 2403–2417.
2. Tian Y., Woodcock C. E., Wang Y. [et al.]. Multiscale analysis and validation of the MODIS LAI product // I uncertainty assessment. *Remote Sensing of environment*. 2002. Vol. 83. P. 414–430.
3. Schaefer M. T., Farmer E., Soto-Berelov M. [et al.]. Overview of ground based techniques for estimating LAI // *AusCover Good practice guidelines: A technical handbook supporting calibration and validation activities of remotely sensed data product*. 2015. Version 1.2. P. 90–122.
4. Baret F., Weiss M., Allard D. [et al.]. Valeri: a network of sites and a methodology for the validation of medium spatial resolution land satellite products // *Remote Sensing Environment*. 2013. URL: <http://researchgate.net>
5. Cohen W. B., Maersperger T. K., Turner D. P. [et al.]. MODIS land cover and LAI collection 4 product quality across nine sites in the western hemisphere// *IEEE transactions on geoscience and remote sensing*. 2006. Vol. 44. P. 1843–1857.
6. Jonckheere I., Fleck S., Nackaerts K. [et al.]. Review of methods for in situ leaf area index determination part I theories, sensors and hemispherical photography // *Agricultural and forest meteorology*. 2004. Vol. 121. P. 19–35.
7. Soudani K., Delpierre N., Berveiller D. [et al.]. A survey of proximal methods for monitoring leaf phenology in temperate deciduous forests // *Biogeosciences*. 2021. Vol. 18. P. 3391–3408.
8. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М. : Наука, 1974. 432 с.

**References**

1. Breda N.J.J. Ground-based measurements of leaf area index: a review of methods, instruments and current controversies. *Journal of experimental botany*. 2003;54:2403–2417.
2. Tian Y., Woodcock C.E., Wang Y. et al. Multiscale analysis and validation of the MODIS LAI product: I. Uncertainty assessment. *Remote Sensing of environment*. 2002;83:414–430.
3. Schaefer M.T., Farmer E., Soto-Berelov M. et al. Overview of ground based techniques for estimating LAI. *AusCover Good practice guidelines: A technical handbook supporting calibration and validation activities of remotely sensed data product*. 2015;(Vers.1.2):90–122.
4. Baret F., Weiss M., Allard D. et al. Valeri: a network of sites and a methodology for the validation of medium spatial resolution land satellite products. *Remote Sensing Environment*. 2013. Available at: <http://researchgate.net>
5. Cohen W.B., Maersperger T.K., Turner D.P. et al. MODIS land cover and LAI collection 4 product quality across nine sites in the western hemisphere. *IEEE transactions on geoscience and remote sensing*. 2006;44:1843–1857.
6. Jonckheere I., Fleck S., Nackaerts K. et al. Review of methods for in situ leaf area index determination: Part I. Theories, sensors and hemispherical photography. *Agricultural and forest meteorology*. 2004;121:19–35.
7. Soudani K., Delpierre N., Berveiller D. et al. A survey of proximal methods for monitoring leaf phenology in temperate deciduous forests. *Biogeosciences*. 2021;18:3391–3408.
8. El'sgol'ts L.E. *Differentsial'nye uravneniya i variatsionnoe ischislenie = Differential equations and calculus of variations*. Moscow: Nauka, 1974:432. (In Russ.)

**Информация об авторах / Information about the authors****Фахраддин Гюльали оглы Агаев**

доктор технических наук, профессор,  
директор Института космических  
исследований природных ресурсов  
Национального аэрокосмического агентства  
(Азербайджанская Республика, г. Баку,  
ул. С. С. Ахундова, 1)  
E-mail: [director.tekti@mail.ru](mailto:director.tekti@mail.ru)

**Fakhraddin G. Agaev**

Doctor of technical sciences, professor,  
director of the Institute for Space Research  
of Natural Resources of the National Aerospace  
Agency  
(1 S.S. Akhundova street, Baku, Azerbaijan Republic)

**Мерадж Эддар оглы Омаров**

аспирант,  
Институт космических  
исследований природных ресурсов  
Национального аэрокосмического агентства  
(Азербайджанская Республика, г. Баку,  
ул. С. С. Ахундова, 1)  
E-mail: [meracomarov@gmail.com](mailto:meracomarov@gmail.com)

**Meraj E. Omarov**

Postgraduate student,  
Institute for Space Research of Natural Resources  
of the National Aerospace Agency  
(1 S.S. Akhundova street, Baku, Azerbaijan Republic)

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов /  
The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию/Received 11.12.2023

Поступила после рецензирования/Revised 12.01.2024

Принята к публикации/Accepted 09.02.2024