

Г. И. Козырев, А. Н. Кравцов, В. Д. Усиков

РАСЧЕТ ЧАСТОТЫ ОПРОСА В МНОГОКАНАЛЬНЫХ ИНФОРМАЦИОННО-ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ С ЕДИНЫХ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ И ТОЧНОСТНЫХ ПОЗИЦИЙ

G. I. Kozyrev, A. N. Kravcov, V. D. Usikov

CALCULATING OF THE POLLING FREQUENCY IN MULTI- CHANNEL INFORMATION-MEASURING SYSTEMS THE SAME ENERGETIC AND ACCURACY POSITIONS

А н н о т а ц и я. Актуальность и цель. Актуальность темы работы обусловлена необходимостью дискретного представления различных моделей непрерывных сообщений с единых энергетических и точностных позиций. Целью работы является получение простых аналитических выражений для оценки частоты опроса (дискретизации) в зависимости от заданной погрешности восстановления, максимальной частоты спектра F_m исходного сообщения с учетом субъективности определения F_m при восстановлении исходного сообщения интерполяционными полиномами Лагранжа. **Результаты.** Рассмотрены три наиболее распространенных модели измерительных сообщений, когда энергетический спектр и корреляционная функция исходного процесса представляются как: реакция идеального фильтра нижних частот (ФНЧ) на белый шум, реакция низкочастотного RC-фильтра на белый шум, реакция гауссова ФНЧ на белый шум. Произведен расчет частоты опроса по полученным в работе приближенным формулам при восстановлении исходного процесса для указанных выше моделей с помощью интерполяционных полиномов Лагранжа нулевого и первого порядков при заданной погрешности восстановления. Субъективность определения F_m была отражена путем введения коэффициента пропорциональности K_p , соответствующего стопроцентному количеству мощности исходного процесса, заключенному в интервале частот $[0, F_m]$. Значения параметра p задавались равными 0,9; 0,95 и 0,99, как наиболее часто используемые на практике. **Выводы.** Введение коэффициента пропорциональности, соответствующего 100 p -процентному количеству мощности исходного процесса, заключенному в интервале частот $[0, F_m]$, позволяет учесть субъективность определения F_m и подойти к анализу дискретного представления различных моделей непрерывных сообщений с единых энергетических и точностных позиций. При этом отпадает необходимость в использовании других параметров энергетического спектра, таких как эффективное значение спектра, ширина спектра на уровне 0,707, 50 %, 25 % мощности и т.д.

A b s t r a c t. Background. The relevance of the topic of work is due to the need for a discrete presentation of various models of continuous communications from a single energy and precision positions. The aim of the work is to obtain simple analytical expressions for estimating the polling (sampling) frequency depending on a given reconstruction error, the maximum frequency of the spectrum F_m of the initial message, taking into account the subjectivity of the determination of F_m when restoring the original message by Lagrange interpolation polynomials. **Results.** The three most common models of measuring messages are considered, when the

energy spectrum and the correlation function of the initial process are presented as: the response of an ideal low-pass filter (LPF) to white noise, the reaction of a low-frequency RC filter to white noise, the reaction of a Gaussian low-pass filter to white noise. The polling frequency was calculated using the approximate formulas obtained in the work when restoring the initial process for the above models using Lagrange interpolation polynomials. zero and first orders for a given error recovery. The determination subjectivity was reflected by introducing a proportionality coefficient K_p corresponding to $100p$ – the percentage of the power of the initial process, enclosed in the frequency range $[0, F_m]$. The values of the parameter p were set equal to 0.9; 0.95 and 0.99, as the most commonly used in practice. **Conclusions.** The introduction of the proportionality coefficient corresponding to $100p$ — the percentage of the power of the initial process, enclosed in the frequency interval $[0, F_m]$, allows one to take into account the subjectivity of the determination of F_m and approach the analysis of the discrete representation of various models of continuous messages from the same energy and accuracy positions. In this case, there is no need to use other parameters of the energy spectrum, such as the effective value of the spectrum, the width of the spectrum at the level of 0.707, 50 %, 25 % of the power, etc.

К л ю ч е в ы е с л о в а: частота опроса, энергетический спектр, корреляционная функция, максимальная частота спектра, погрешность восстановления.

К e y w o r d s: interrogation frequency, energy spectrum, correlation function, maximum spectrum frequency, reconstruction error.

Введение

Большинство существующих информационно-измерительных систем с временным разделением канальных сигналов, в том числе телеметрических, построено по принципу передачи мгновенных значений (отсчетов) контролируемых непрерывных величин через равноотстоящие промежутки времени или с постоянной частотой опроса (дискретизации).

Очевидно, что восстановление непрерывного сообщения конечной длительности по его дискретным значениям может производиться лишь с определенной погрешностью, которая, в свою очередь, зависит от динамических характеристик передаваемого сообщения, выбранного метода восстановления и частоты опроса [1, 2].

В практике измерений, например в телеметрии, погрешность восстановления обычно задается в виде приведенной среднеквадратической погрешности $\gamma_B = \sigma_B / L$, где σ_B – среднеквадратическое отклонение погрешности восстановления, $L = x_{\max} - x_{\min}$ – диапазон (шкала) изменения измеряемой величины $x(t)$.

Динамика измеряемой величины, как правило, выражается через максимальную (граничную) частоту процесса $x(t)$, которая на практике обычно определяется с помощью выражения

$$\int_0^{F_m} G_x(f) df = p E_x, \quad (1)$$

где $E_x = \int_0^{\infty} G_x(f) df$ – полная мощность процесса; p – параметр, учитывающий, какое количество мощности процесса, по сравнению с E_x , заключено в интервале $[0, F_m]$.

В назначении параметра p заключается «субъективный произвол» как проектировщика системы сбора и передачи измерительной информации, так и зачастую пользователя данной информации, которые при определении F_m обычно оперируют энергетическими представлениями об исходном процессе, а не точностными. Очевидно, что энергетические и точностные показатели связаны между собой, так как параметр p указывает на степень «обрезания» энергетического спектра исходного непрерывного сообщения (теоретически бесконечного за счет конечной временной реализации $x(t)$) при выборе F_m и дальнейшем его дискретном представлении. По аналогии со случайными величинами параметр p играет роль доверительной

вероятности и учитывает потери в исходной информации за счет приближенности оператора дискретного представления.

Отсюда величина параметра p должна учитываться при расчете погрешности восстановления процесса $x(t)$. В проводимых ниже рассуждениях по оценке частоты опроса значения параметра p задавались равными 0,9; 0,95 и 0,99, как наиболее часто используемые на практике.

В качестве методов восстановления широкое распространение получили неоптимальные, но универсальные и легко реализуемые на практике методы на основе интерполяционных полиномов Лагранжа нулевого и первого порядков. При этом расчет частоты опроса с использованием полного описания корреляционных функций исходных процессов требует большого количества априорной информации и громоздких вычислений. Приближенные же выражения либо дают завышенные оценки, например, при использовании неравенства Бернштейна, связывающего максимальную частоту спектра с верхней границей производной n -го порядка ансамбля реализаций исходного процесса, либо требуют учета и сопоставления различных параметров энергетического спектра и корреляционной функции исходного процесса, либо не учитывают указанный «субъективный произвол» при нахождении максимальной частоты спектра измеряемой величины [3].

Задачей данной статьи является получение простых аналитических выражений для оценки частоты опроса (дискретизации) F_o в зависимости от заданной погрешности восстановления, максимальной частоты спектра исходного сообщения с учетом субъективности определения F_m при восстановлении исходного сообщения интерполяционными полиномами Лагранжа.

Вывод аналитических выражений для оценки частоты опроса

Пусть измеряемая величина $x(t)$ является гауссовским стационарным случайным процессом с энергетическим спектром $G_x(f)$ и нормированной корреляционной функцией $R_x(\tau)$. При восстановлении процесса $x(t)$ с помощью симметричного интерполятора нулевого порядка (ИНП) максимальная величина погрешности восстановления [4]

$$\gamma_{B\max} = \sqrt{2[1 - R_x(T_o/2)]} \gamma_x,$$

где $T_o = 1/F_o$ означает период опроса измеряемой величины; $\gamma_x = \sigma_x/L$ – приведенное среднеквадратическое отклонение процесса $x(t)$ со шкалой изменения L .

Для гауссовского процесса $L \cong 6\sigma_x$. Отсюда величина $\gamma_{B\max}$, взятая в процентах,

$$\gamma_{B\max} = 23,57 \sqrt{1 - R_x(T_o/2)}. \quad (2)$$

При восстановлении процесса $x(t)$ с помощью интерполятора первого порядка (ИПП) [4]

$$\gamma_{B\max} = 16,67 \sqrt{1,5 - 2R_x(T_o/2) + 0,5R_x(T_o)}. \quad (3)$$

Как видно из выражений (1) – (3), для нахождения аналитических взаимосвязей между F_o , γ_{Bm} и F_m необходимо знать энергетический спектр $G_x(f)$ и корреляционную функцию $R_x(\tau)$ процесса $x(t)$.

Рассмотрим три наиболее распространенные модели измерительных сообщений, когда энергетический спектр и корреляционная функция исходного процесса представляются как:

1) реакция идеального фильтра нижних частот (ИФНЧ) на белый шум

$$G_x(f) = \frac{1}{F_m}, \quad f \in [0, F_m], \quad (4)$$

$$G_x(f) = 0, \quad f \notin [0, F_m],$$

$$R_x(\tau) = \frac{\sin 2\pi F_m \tau}{2\pi F_m \tau}; \quad (5)$$

2) реакция низкочастотного RC -фильтра на белый шум

$$G_x(f) = \frac{4\alpha}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2}, \quad (6)$$

$$R_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}, \quad \alpha = \frac{1}{RC}; \quad (7)$$

3) реакция гауссова ФНЧ на белый шум

$$G_x(f) = 2\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\pi^2 f^2}{\alpha}}, \quad (8)$$

$$R_x(\tau) = e^{-\alpha\tau^2}. \quad (9)$$

Для приведенных выше моделей $E_x = 1$.

Выразим параметр α в выражениях (6) – (9) через максимальную частоту спектра F_m , используя уравнение (1).

RC-фильтр

$$\int_0^{F_m} \frac{4\alpha}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2} df = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{2\pi}{\alpha} F_m = p; \quad (10)$$

$$\alpha = \frac{2\pi}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} p} F_m = K_p F_m,$$

где K_p – коэффициент пропорциональности.

Определим численные значения коэффициента K_p для конкретных величин параметра p :

$$\begin{aligned} p = 0,9; \quad \alpha = F_m; \quad K_{0,9} = 1; \\ p = 0,95; \quad \alpha = 0,5F_m; \quad K_{0,95} = 0,5; \\ p = 0,99; \quad \alpha = 0,1F_m; \quad K_{0,99} = 0,1. \end{aligned} \quad (11)$$

Гауссов ФНЧ

$$\int_0^{F_m} 2\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\pi^2 f^2}{\alpha}} df = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{t_m} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 2\Phi_o(t_m) = p, \quad (12)$$

где $t = \sqrt{\frac{2}{\alpha}} \pi f$; $\Phi_o(t_m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{t_m} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ – функция распределения нормированного нормального закона:

$$\alpha = \frac{2\pi^2}{t_m^2} F_m^2 = K_p^2 F_m^2. \quad (13)$$

Аналогичным образом, подставив конкретные значения параметра p в выражения (12) и используя табулированность функции $\Phi_o(t_m)$ с учетом (13), определим численные значения для коэффициентов пропорциональности K_p :

$$\begin{aligned} p = 0,9; \quad \alpha = 7,25F_m^2; \quad K_{0,9} = 2,69; \\ p = 0,95; \quad \alpha = 5,14F_m^2; \quad K_{0,95} = 2,27; \\ p = 0,99; \quad \alpha = 2,96F_m^2; \quad K_{0,99} = 1,72. \end{aligned} \quad (14)$$

Для нахождения аналитических зависимостей $F_o = F_o(\gamma_{Вм}, F_m)$ в явном виде при восстановлении процесса $x(t)$ с помощью ИНП и ИПП в формулы (2) и (3) нужно подставить выражения для корреляционных функций (5), (7) и (9) с учетом (10), (13), а полученные уравнения решить относительно $F_o = 1/T_o$.

Восстановление исходного процесса с помощью интерполятора нулевого порядка

Из выражения (2) следует

$$R_x(T_o/2) = 1 - 0,0018\gamma_{Вм}^2. \quad (15)$$

1. Модель вида (4), (5) – ИФНЧ.

Подставив (5) в (15) при $\tau = T_o/2$, получим

$$\frac{\sin \pi F_m T_o}{\pi F_m T_o} = 1 - 0,0018\gamma_{Вм}^2.$$

Точное значение $F_o = 1/T_o$ при заданных F_m и $\gamma_{Вм}$ можно определить с помощью табличного представления функции $\frac{\sin z}{z}$, где $z = \pi F_m T_o$.

Используя разложение $\frac{\sin z}{z} \cong 1 - \frac{z^2}{3!}$ при $z \leq \frac{\pi}{2}$, получаем приближенную формулу для расчета F_o

$$F_o = 30,2 \frac{F_m}{\gamma_{Вм}}. \quad (16)$$

2. Модель вида (6), (7) – RC-фильтр.

Из формул (15), (7) и (10) следует

$$e^{-K_p F_m |T_o/2|} = 1 - 0,0018\gamma_{Вм}^2.$$

Отсюда

$$F_o = \frac{K_p F_m}{2 \ln(1 - 0,0018\gamma_{Вм}^2)^{-1}},$$

где K_p определяется с помощью уравнения (11).

Используя разложение $\ln(1-z)^{-1} \cong z + \frac{z^2}{2}$, где $z = 0,0018\gamma_{Вм}^2$, $z \ll 1$ для практических значений $\gamma_{Вм}$, получаем

$$F_o = 277,8 \frac{K_p F_m}{\gamma_{Вм}^2}. \quad (17)$$

3. Модель вида (8), (9) – гауссов ФНЧ.

Из формул (15), (9) и (13) следует

$$e^{-K_p^2 F_m^2 |T_o/2|^2} = 1 - 0,0018\gamma_{Вм}^2.$$

Отсюда

$$F_o = \frac{K_p F_m}{2 \sqrt{\ln(1 - 0,0018\gamma_{Вм}^2)^{-1}}},$$

где K_p определяется с помощью уравнения (14).

Используя разложение логарифмической и степенной функции в ряд и ограничившись первыми двумя членами, получаем

$$F_o = 11,8 \frac{K_p F_m}{\gamma_{Bm}}. \quad (18)$$

Восстановление исходного процесса с помощью интерполятора первого порядка

Из выражения (2) следует

$$R_x(T_o) - 4R_x(T_o) + 3 = 0,0072\gamma_{Bm}^2. \quad (19)$$

1. Модель вида (4), (5) – ИФНЧ.

Подставив выражение (5) в (19) при $\tau = T_o$ и используя разложение $\frac{\sin z}{z} \cong 1 + a_2 z^2 + a_4 z^4$ при $z \leq \frac{\pi}{2}$, где $a_2 = -0,16605$; $a_4 = 0,00761$ [5], получим приближенное выражение для частоты опроса

$$F_o = 5,9 \frac{K_p F_m}{\sqrt{\gamma_{Bm}}}. \quad (20)$$

2. Модель вида (6), (7) – RC-фильтр.

Подставляя выражение (7) с учетом (10) в (19) и используя разложение $e^{-z} \cong 1 + a_1 z + a_2 z^2$, где $a_1 = 0,9664$; $a_2 = 0,3536$, $z \leq \ln 2$ [5], получаем

$$F_o = 134,1 \frac{K_p F_m}{\gamma_{Bm}^2}, \quad (21)$$

где K_p определяется с помощью уравнения (11).

3. Модель вида (8), (9) – гауссов ФНЧ.

Используя уравнения (9), (13) и разложение для показательной функции в выражении (19) соответственно получаем

$$F_o = 3,2 \frac{K_p F_m}{\sqrt{\gamma_{Bm}}}. \quad (22)$$

где K_p определяется с помощью формулы (14).

Приближенные выражения для оценки частоты опроса непрерывных сообщений, представленных моделями (4) – (9), приведены в табл. 1.

Таблица 1

Приближенные выражения для оценки частоты опроса непрерывных сообщений

Метод восстановления	Частота опроса F_o , Гц		
	ИФНЧ	RC-фильтр	Гауссов ФНЧ
ИНП	$30,2 \frac{F_m}{\gamma_{Bm}}$	$277,8 \frac{K_p F_m}{\gamma_{Bm}^2}$	$11,8 \frac{K_p F_m}{\gamma_{Bm}}$
ИПП	$5,9 \frac{F_m}{\sqrt{\gamma_{Bm}}}$	$134,1 \frac{K_p F_m}{\gamma_{Bm}^2}$	$3,2 \frac{K_p F_m}{\sqrt{\gamma_{Bm}}}$

При этом погрешность приближения для $\gamma_{Bm} \leq 5\%$ не превышает 0,3% от точного значения F_o .

Заключение

Определение максимальной частоты спектра F_m исходного процесса с помощью выражения (1) позволяет наряду с физической ясностью в оценке F_m подойти к анализу дискретного представления различных моделей непрерывных сообщений с единых энергетических и точностных позиций. Введение коэффициента пропорциональности K_p , соответствующего 100р-процентному количеству мощности исходного процесса, заключенному в интервале частот $[0, F_m]$, позволяет выразить параметр α , характеризующий форму энергетического спектра и корреляционной функции первичного сообщения в рамках выбранной модели, через величины K_p и F_m . При этом отпадает необходимость в использовании других параметров энергетического спектра, таких как эффективное значение спектра, ширина спектра на уровне 0,707, 50%, 25% мощности и т.д. [6, 7].

Библиографический список

1. Лоскутов, А. И. Телеметрия / А. И. Лоскутов, А. А. Бянкин, Г. И. Козырев [и др.]. – Санкт-Петербург : Изд-во ВКА им. А. Ф. Можайского, 2017. – 343 с.
2. Современная телеметрия в теории и на практике / А. В. Назаров, Г. И. Козырев, И. В. Шитов, В. П. Обрученков, А. В. Древин, В. Б. Краскин [и др.]. – Санкт-Петербург : Наука и техника, 2007. – 667 с.
3. Новоселов, О. М. Основы теории и расчета информационно-измерительных систем / О. М. Новоселов, А. Ф. Фомин. – 2-е изд. – Москва : Машиностроение, 1991. – 336 с.
4. Новоселов, О. М. Основы теории и расчета информационно-измерительных систем / О. М. Новоселов, А. Ф. Фомин. – Москва : Машиностроение, 1980. – 280 с.
5. Корн, Г. Справочник по математике (для научных работников и инженеров) / Г. Корн, Т. Корн. – Москва : Наука, 1974. – 832 с.
6. Самойлов, Л. К. Выбор частоты дискретизации реальных сигналов / Л. К. Самойлов, А. В. Жуков // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. – 2009. – № 1. – С. 29–31.
7. Кошевой, А. А. Телеметрические комплексы летательных аппаратов / А. А. Кошевой. – Москва : Машиностроение, 1975. – 312 с.

References

1. Loskutov A. I., Byankin A. A., Kozyrev G. I. et al. *Telemetriya* [Telemetry]. Saint-Petersburg: Izd-vo VKA im. A. F. Mozhayskogo, 2017, 343 p. [In Russian]
2. Nazarov A. V., Kozyrev G. I., Shitov I. V., Obruchenkov V. P., Drevin A. V., Kraskin V. B. et al. *Sovremennaya telemetriya v teorii i na praktike* [Modern telemetry in theory and practice]. Saint-Petersburg: Nauka i tekhnika, 2007, 667 p. [In Russian]
3. Novoselov O. M., Fomin A. F. *Osnovy teorii i rascheta informatsionno-izmeritel'nykh sistem* [Fundamentals of the theory and calculation of information and measurement systems]. 2nd ed. Moscow: Mashinostroenie, 1991, 336 p. [In Russian]
4. Novoselov O. M., Fomin A. F. *Osnovy teorii i rascheta informatsionno-izmeritel'nykh sistem* [Fundamentals of the theory and calculation of information and measurement systems]. Moscow: Mashinostroenie, 1980, 280 p. [In Russian]
5. Korn G., Korn T. *Spravochnik po matematike (dlya nauchnykh rabotnikov i inzhenerov)* [Reference book on mathematics (for scientists and engineers)]. Moscow: Nauka, 1974, 832 p. [In Russian]
6. Samoylov L. K., Zhukov A. V. *Pribory i sistemy. Upravlenie, kontrol', diagnostika* [Devices and systems. Management, monitoring, diagnostics]. 2009, no. 1, pp. 29–31. [In Russian]
7. Koshevoy A. A. *Telemetricheskie komplekсы letatel'nykh apparatov* [Telemetry systems of aircraft]. Moscow: Mashinostroenie, 1975, 312 p. [In Russian]

Козырев Геннадий Иванович

доктор технических наук, профессор,
кафедра телеметрических систем, комплексной
обработки и защиты информации,
Военно-космическая академия
имени А. Ф. Можайского
(Россия, г. Санкт-Петербург, ул. Ждановская, 13)
E-mail: gen-kozyrev@yandex.ru

Kozyrev Gennadiy Ivanovich

doctor of technical sciences, professor,
sub-department of telemetric systems,
integrated processing and information protection,
Military Space Academy named after A. F. Mozhaysky
(13 Zhdanovskaya street, St. Petersburg, Russia)

Кравцов Александр Николаевич

кандидат технических наук, доцент,
начальник кафедры метрологического обеспечения
вооружения, военной и специальной техники,
Военно-космическая академия
имени А. Ф. Можайского
(Россия, г. Санкт-Петербург, ул. Ждановская, 13)
E-mail: kan1970@bk.ru

Kravcov Aleksandr Nikolaevich

candidate of technical sciences, associate professor,
head of sub-department of metrological support
of arms, military and special equipment,
Military Space Academy named after A. F. Mozhaysky
(13 Zhdanovskaya street, St. Petersburg, Russia)

Усиков Валентин Дмитриевич

адъюнкт,
кафедра метрологического обеспечения
вооружения, военной и специальной техники,
Военно-космическая академия
имени А. Ф. Можайского
(Россия, г. Санкт-Петербург, ул. Ждановская, 13)
E-mail: usikov_1989@list.ru

Usikov Valentin Dmitrievich

adjunct,
sub-department of metrological support of arms, mili-
tary and special equipment,
Military Space Academy named after A. F. Mozhaysky
(13 Zhdanovskaya street, St. Petersburg, Russia)

Образец цитирования:

Козырев, Г. И. Расчет частоты опроса в многоканальных информационно-измерительных системах с единых энергетических и точностных позиций / Г. И. Козырев, А. Н. Кравцов, В. Д. Усиков // Измерение. Мониторинг. Управление. Контроль. – 2020. – № 2 (32). – С. 14–21. – DOI 10.21685/2307-5538-2020-2-2.