

## МЕТОДИКА РАСЧЕТА ТОЛЩИНЫ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ МЕМБРАНЫ ПОЛУПРОВОДНИКОВОГО ТЕНЗОПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ ДАВЛЕНИЯ С УЧЕТОМ НЕЛИНЕЙНОГО ИЗГИБА

В. С. Волков<sup>1</sup>, С. Н. Базыкин<sup>2</sup>, А. А. Трофимов<sup>3</sup>

<sup>1,2,3</sup> Пензенский государственный университет, Пенза, Россия  
<sup>1</sup>vadimv\_1978@mail.ru, <sup>2</sup>cbazykin@yandex.ru, <sup>3</sup>alex.t1978@mail.ru

**Аннотация.** *Актуальность и цели.* Чувствительные элементы полупроводниковых преобразователей давления традиционно изготавливаются в виде круглых и квадратных мембран, в то время как применение другой геометрической формы, например прямоугольной, позволяет уменьшить габариты при сохранении высокой чувствительности. Целью работы является исследование влияния нелинейного изгиба прямоугольной мембраны тензопреобразователя под действием измеряемого давления на выходной сигнал, разработка методики определения толщины мембраны с учетом нелинейного изгиба и определение погрешности нелинейности. *Материалы и методы.* Существующие методики определения толщины мембран преобразователей давления учитывают только линейный изгиб, а известное уравнение нелинейного изгиба мембраны не имеет аналитического решения и ранее решалось приближенным графическим методом, поэтому была разработана методика определения толщины прямоугольной кремниевой мембраны тензопреобразователя с учетом нелинейного изгиба по критерию механической прочности путем решения уравнения прогиба мембраны численным методом в программе MathCad. *Результаты.* Разработана методика, позволяющая рассчитывать толщину прямоугольной плоской мембраны кремниевого тензопреобразователя давления, построена зависимость выходного напряжения мостовой схемы от приложенного давления с учетом линейного и нелинейного изгиба прямоугольной мембраны. *Выводы.* С использованием разработанной методики определена погрешность нелинейности выходного сигнала при учете только линейного изгиба мембраны, показано, что данная погрешность составляет 3 %, что не соответствует современным требованиям, предъявляемым к средствам измерения давления и требует разработки конструктивных решений по снижению данной погрешности.

**Ключевые слова:** полупроводниковый преобразователь давления, прямоугольная кремниевая мембрана, толщина мембраны, нелинейный изгиб, погрешность нелинейности

**Для цитирования:** Волков В. С., Базыкин С. Н., Трофимов А. А. Методика расчета толщины прямоугольной мембраны полупроводникового тензопреобразователя давления с учетом нелинейного изгиба // Измерение. Мониторинг. Управление. Контроль. 2024. № 3. С. 64–70. doi: 10.21685/2307-5538-2024-3-8

## A METHOD FOR CALCULATING THE THICKNESS OF A RECTANGULAR MEMBRANE FOR A SEMICONDUCTOR PRESSURE PIEZORESISTIVE TRANSDUCER TAKING INTO ACCOUNT NONLINEAR BENDING

V.S. Volkov<sup>1</sup>, S.N. Bazykin<sup>2</sup>, A.A. Trofimov<sup>3</sup>

<sup>1,2,3</sup> Penza State University, Penza, Russia  
<sup>1</sup>vadimv\_1978@mail.ru, <sup>2</sup>cbazykin@yandex.ru, <sup>3</sup>alex.t1978@mail.ru

**Abstract.** *Background.* The sensing elements of semiconductor pressure transducers are traditionally made in the form of round and square membranes, while the use of other geometric shapes, for example, rectangular, allows you to reduce the dimensions while maintaining high sensitivity. The aim of the work is to study the effect of nonlinear bending of a rectangular membrane for piezoresistive transducer under the influence of measured pressure on the output signal and to determine the error of nonlinearity. *Materials and methods.* Existing methods for determining the membrane thickness of pressure transducers take into account only linear bending, and the well-known equation of nonlinear membrane bending has no analytical solution and was previously solved by an approximate graphical method, therefore, a method for determining the thickness of a rectangular silicon membrane of a strain gauge was developed taking into account nonlinear bending according to the criterion of mechanical strength by solving the membrane deflection equation numerically in

the MathCad program. *Results.* A technique has been developed to calculate the thickness of a rectangular flat membrane of a silicon pressure strain converter, and the dependence of the output voltage of the bridge circuit on the applied pressure has been constructed, taking into account the linear and nonlinear bending of the rectangular membrane. *Conclusions.* Using the developed technique, the error of the nonlinearity of the output signal was determined when taking into account only the linear bending of the membrane, it was shown that this error is 3 %, which does not meet modern requirements for pressure measuring instruments and requires the development of constructive solutions to reduce this error.

**Keywords:** semiconductor pressure transducer, rectangular silicon membrane, membrane thickness, non-linear bending, non-linearity error

**For citation:** Volkov V.S., Bazykin S.N., Trofimov A.A. A method for calculating the thickness of a rectangular membrane for a semiconductor pressure piezoresistive transducer taking into account nonlinear bending. *Izmerenie. Monitoring. Upravlenie. Kontrol' = Measuring. Monitoring. Management. Control.* 2024;(3):64–70. (In Russ.). doi: 10.21685/2307-5538-2024-3-8

### Введение

В полупроводниковых преобразователях давления (ППД) традиционно применяются чувствительные элементы (ЧЭ) в виде круглых и квадратных плоских мембран, хотя современные микромеханические технологии позволяют изготавливать мембраны и других геометрических форм. В частности, прямоугольная мембрана с соотношением 2:1 при той же толщине и приложенном давлении имеет на 60 % большие значения радиальных и тангенциальных механических напряжений, а следовательно, и большую чувствительность [1, 2]. При этом известно, что изгиб мембраны под действием давления является линейным только при малых значениях прогиба, не превышающих толщины самой мембраны. Поэтому актуальной является задача разработки методики определения толщины мембраны в условиях нелинейного изгиба, а также оценка погрешности нелинейности.

### Материалы и методы

Теоретические положения для расчета напряженно-деформированного состояния прямоугольной мембраны изложены в работе [2], в которой показано, что экстремальные значения механических напряжений  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  наблюдаются в центре мембраны и в середине ее длинных сторон, а сдвиговое напряжение – в тех же точках  $\tau_{xy} = 0$  [2] (рис. 1). Этим объясняется тот факт, что в большинстве реализуемых на практике вариантов ППД с прямоугольной мембраной из монокристаллического кремния отмеченные точки характеризуются максимальными по величине значениями чувствительности размещенных в них тензорезисторов, объединенных в мостовую схему [3].

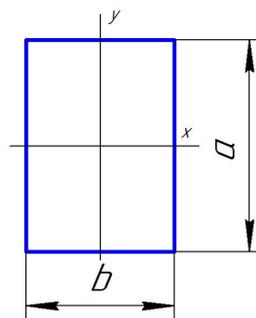


Рис. 1. Геометрические размеры прямоугольной мембраны

Значения напряжений в этих точках связаны друг с другом следующими простыми соотношениями:

$$\sigma_y = \nu \sigma_x (x = \pm a, y = 0); \quad (1)$$

$$\sigma_y = \frac{\nu + (a/b)^2}{1 + \nu(a/h)^2} \sigma_x (x = y = 0), \quad (2)$$

где  $\nu$  – коэффициент Пуассона [2].

Пользуясь законом Гука, выразим теперь относительные удлинения  $\varepsilon_x$  и  $\varepsilon_y$  элемента в функции действующих на него нормальных напряжений:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E}, \\ \varepsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_x}{E} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где  $E$  – модуль упругости материала.

Для того, чтобы мембрана сохранила при деформации непрерывность, необходимо, чтобы поперечная линейная деформация ее в направлении оси  $y$  была равна нулю [2].

Для мембраны, которая находится под действием поперечно приложенного давления и растягивающей силы, направленной вдоль оси  $X$  и вызывающей деформацию срединной плоскости пластинки [2], необходимо учитывать нормальное напряжение и напряжение, обусловленное изгибом [2].

Уравнение кривой прогиба элементарной полоски мембраны будет иметь вид

$$D \frac{d^2 w}{dx^2} = -M, \quad (4)$$

где величина  $D$  называется жесткостью пластинки при изгибе, или цилиндрической жесткостью:

$$\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = D. \quad (5)$$

Для жестко защемленной по краям мембраны изгиб пластинки сопровождается появлением на ее краях растягивающих реактивных усилий  $S$  [2]. Эти реактивные силы зависят от величины прогиба и в свою очередь оказывают влияние на величину изгибающего момента.

Если ввести обозначение

$$\frac{S l^2}{D 4} = u^2, \quad (6)$$

то общее решение уравнения (4) может быть получено в следующем виде:

$$w = C_1 sh \frac{2ux}{l} + C_2 ch \frac{2ux}{l} + \frac{ql^3 x}{8u^2 D} - \frac{ql^2 x^2}{8u^2 D} - \frac{ql^4}{16u^4 D}. \quad (7)$$

Определив постоянные интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  из условий равенства нулю прогиба на концах полоски, а также с учетом выражения  $S$  из формулы (6) и выражения  $D$  из формулы (5), можно получить уравнение для вычисления параметра  $u$  в окончательном виде [2]:

$$u = \frac{E^2 h^8}{(1-\nu^2)^2 q^2 l^8} - \frac{135 th u}{16 u^9} + \frac{27 th^2 u}{16 u^8} - \frac{135}{16 u^8} + \frac{9}{8 u^6}. \quad (8)$$

Радиальное и тангенциальное механические напряжения в серединах сторон мембраны с учетом нелинейного изгиба определяются выражениями на основе (1) и (2) [3]:

$$\sigma_x = 2P \left( \frac{a}{h} \right)^2 \Psi + \frac{E \cdot h^3}{12(1-\nu^2) \left( \frac{a}{h} \right)^2}; \quad (9)$$

$$\sigma_y = \sigma_x \nu, \quad (10)$$

где

$$\Psi = 3 \frac{uch \left( u \frac{x}{a} \right) - sh(u)}{(u)^2 sh(u)}, \quad (11)$$

а параметр  $u$  определяется выражением (8).

Известные на данный момент методики определения параметра  $\psi$  основаны на графическом определении параметра  $u$ , так как выражение (8) не имеет аналитического решения, поэтому была разработана методика определения геометрических параметров прямоугольной мембраны, основанная на определении параметра  $u$  численным методом в программе MathCad.

Методика определения толщины  $h$  в идее схемы алгоритма представлена на рис. 2.

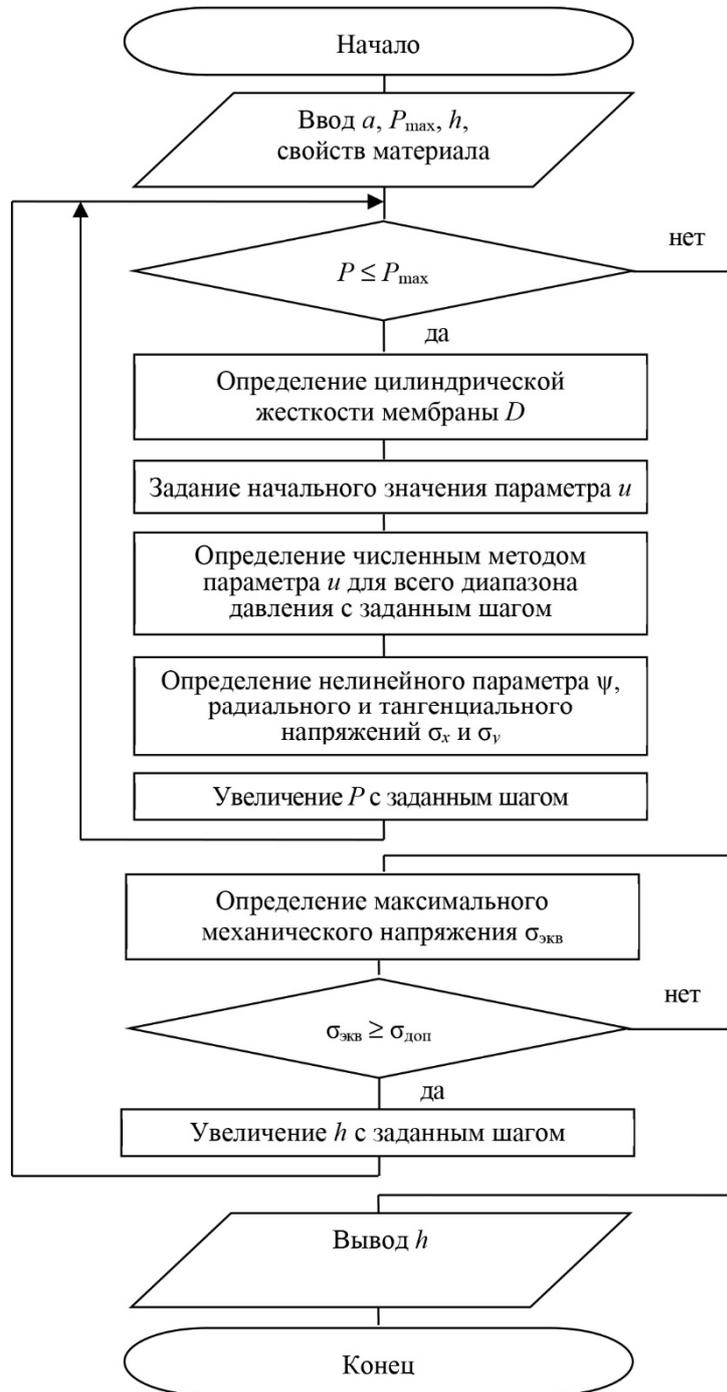


Рис. 2. Методика определения толщины мембраны

Первоначально задаются геометрические размеры мембраны и свойства материала (модуль упругости и коэффициент Пуассона), с учетом того, что  $b = 2a$ , максимальное измеряемое давление  $P_{\max}$  и начальное значение толщины  $h$ . Далее для всего диапазона значений измеряемого давления с заданным шагом определяются цилиндрическая жесткость, параметр  $u$  и нелинейный параметр  $\psi$  по формулам (5), (8), (9)–(11). После этого проверяется условие превышения эквивалентного механического напряжения над допуском. Пока условие

выполняется, производится увеличение толщины  $h$  с заданным шагом. Как только условие перестает выполняться, это означает, что при соответствующем значении толщины выполняется условие прочности мембраны, далее соответствующее значение  $h$  выдается пользователю.

Предложенная методика была реализована в виде программы в MathCad со следующими исходными данными: модуль упругости кремния  $E = 169$  ГПа, коэффициент Пуассона кремния  $\nu = 0,359$ , длина короткой стороны мембраны  $a = 2$  мм, максимальное измеряемое давление  $P_{\max} = 100$  кПа, допускаемое напряжение для кремния  $\sigma_{\text{доп}} = 400$  МПа. Рассчитанное по методике значение  $h = 36$  мкм.

Далее было рассчитано выходное напряжение при максимальном измеряемом давлении для случаев линейного и нелинейного изгиба мембраны. Для найденного значения  $h$  рассчитывались значения механических напряжений по линейной теории для точек в серединах сторон мембраны [3–5]:

$$\sigma_{xi} = 2P \left( \frac{a}{h} \right)^2 \frac{3 \left( \frac{x}{a} \right)^2 - 1}{2}; \quad (12)$$

$$\sigma_{yi} = \sigma_{xi} \nu. \quad (13)$$

Для вычисления выходного сигнала мостовой схемы по линейной и нелинейной теории находим значение сопротивлений тензорезисторов при максимальном давлении ( $i = 1 \dots 4$ ), где механические напряжения определяются выражениями (12), (13) [5–7]:

$$R_i = R_{0i} (1 + \pi_l \sigma_{xi} + \pi_t \sigma_{yi}), \quad (14)$$

где  $\pi_l$  и  $\pi_t$  – продольный и поперечный коэффициенты тензочувствительности кремния, равные  $71,8 \cdot 10^{-11} \text{ Па}^{-1}$  и минус  $66,3 \cdot 10^{-11} \text{ Па}^{-1}$  соответственно. Механические напряжения для нелинейного изгиба определяются по формулам (5), (8), (9)–(11).

Находим линейный выходной сигнал:

$$U_{\text{выхл}} = U_p \frac{R_1 R_4 - R_2 R_3}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}. \quad (15)$$

Далее находим нелинейный выходной сигнал  $U_{\text{выхл}}$ , используя формулу (15), в которой сопротивления  $R_i$  находятся по формуле (14), а нелинейные механические напряжения определяются по методике, изложенной выше (см. рис. 2).

Далее задается номинальное значение сопротивления тензорезистора  $R_0 = 1000$  Ом и напряжение питания мостовой схемы  $U_p = 1$  В. Значение выходного сигнала при максимальном давлении с учетом нелинейного изгиба и вычисленного по линейной теории представлено на рис. 3.

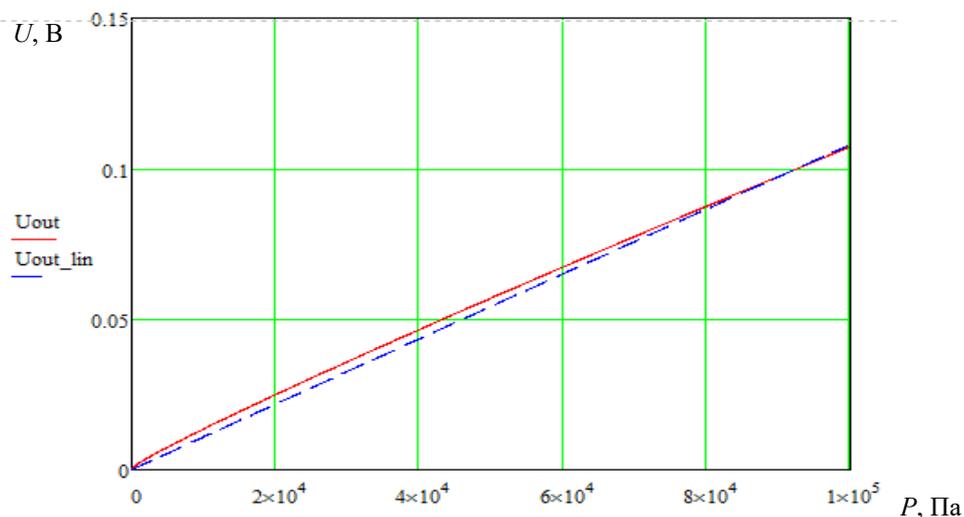


Рис. 3. Выходной сигнал при максимальном давлении по линейной теории (пунктир) и по нелинейной теории (сплошная линия)

Рассчитываем погрешность линейности выходного сигнала мостовой схемы, где индекс  $i$  перебирает весь диапазон измеряемого давления:

$$\delta = \frac{|U_{\text{вых}li} - U_{\text{вых}li}|}{U_{\text{вых}(P_{\text{max}})}} \cdot 100 \%. \quad (16)$$

### Результаты и обсуждения

Зависимость погрешности линейности выходного сигнала мостовой от измеряемого давления представлена на рис. 4.

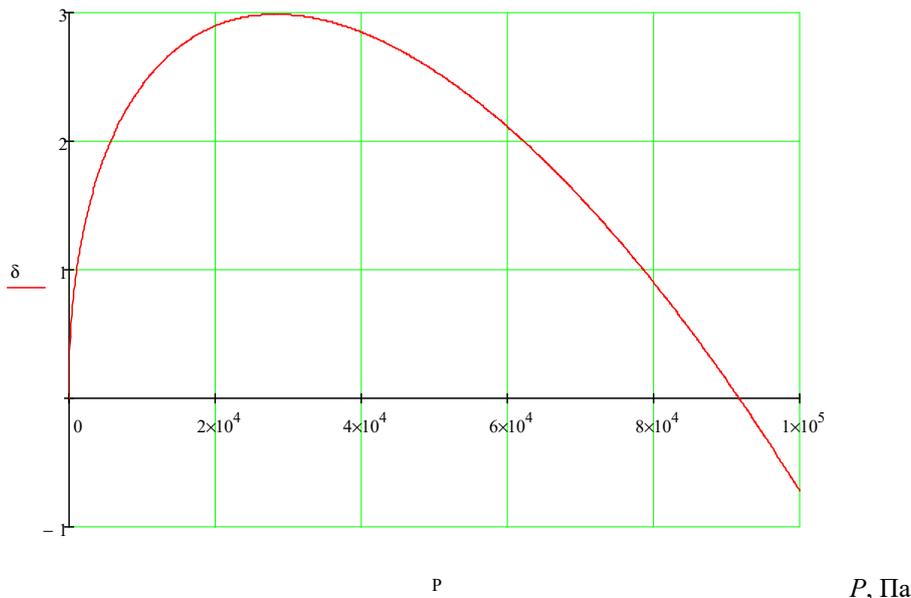


Рис. 4. Зависимость погрешности линейности выходного сигнала от измеряемого давления

Анализ рис. 4 показывает, что при увеличении измеряемого давления погрешность линейности сначала быстро возрастает, достигая максимального значения 3 % при значениях давления порядка 30 кПа, после чего плавно уменьшается до минус 0,6 % при максимальном измеряемом давлении. Полученные значения погрешности говорят о том, что при создании точных средств измерений с основной погрешностью 1 % и менее необходимо учитывать нелинейность зависимости механического напряжения от приложенного давления. Задачей дальнейшего исследования является изучение возможности снижения погрешности линейности при аппроксимации выходного сигнала полиномом различных порядков.

### Список литературы

1. Khakpour R., Mansouri S. R. M., Bahadorimehr A. R. Analytical comparison for square, rectangular and circular diaphragms in MEMS applications // International Conference on Electronic Devices, Systems and Applications. Kuala Lumpur, Malaysia, 2010. P. 297–299.
2. Тимошенко С. П., Войновский С. Кригер. Пластинки и оболочки. М. : Наука, 1966. 636 с.
3. Ваганов В. И. Интегральные тензопреобразователи. М. : Энергоатомиздат, 1983. 137 с.
4. Эрлер В., Вальтер Л. Электрические измерения неэлектрических величин полупроводниковыми тензорезисторами. М. : Мир, 1974.
5. Волков В. С., Французов М. В., Рыблова Е. А. Аналитическое и численное моделирование чувствительных элементов полупроводниковых датчиков давления // Измерение. Мониторинг. Управление. Контроль. 2016. № 2. С. 110–117.
6. Бастрыгин К. И., Трофимов А. А., Баранов А. С. [и др.]. Имитационное моделирование пьезоэлектрического датчика давления // Измерение. Мониторинг. Управление. Контроль. 2017. № 1. С. 20–28.
7. Мусаев Р. Ш., Трофимов А. А., Фролов М. А. Имитационное моделирование чувствительного элемента тензорезистивного датчика абсолютного давления // Измерение. Мониторинг. Управление. Контроль. 2012. № 2. С. 51–55.

## References

1. Khakpour R., Mansouri S.R.M., Bahadorimehr A.R. Analytical comparison for square, rectangular and circular diaphragms in MEMS applications. *International Conference on Electronic Devices, Systems and Applications*. Kuala Lumpur, Malaysia, 2010:297–299.
2. Timoshenko S.P., Voynovskiy S. Kriger. *Plastinki i obolochki = Plates and shells*. Moscow: Nauka, 1966:636. (In Russ.)
3. Vaganov V.I. *Integral'nye tenzopreobrazovateli = Integral strain converters*. Moscow: Energoatomizdat, 1983:137. (In Russ.)
4. Erler V., Val'ter L. *Elektricheskie izmereniya neelektricheskikh velichin poluprovodnikovymi tenzorezistorami = Electrical measurements of non-electrical quantities by semiconductor strain gages*. Moscow: Mir, 1974. (In Russ.)
5. Volkov V.S., Frantsuzov M.V., Ryblova E.A. Analytical and numerical modeling of sensitive elements of semiconductor pressure sensors. *Izmerenie. Monitoring. Upravlenie. Kontrol' = Measurement. Monitoring. Management. Control*. 2016;(2):110–117. (In Russ.)
6. Bastrygin K.I., Trofimov A.A., Baranov A.S. et al. Simulation modeling of a piezoelectric pressure sensor. *Izmerenie. Monitoring. Upravlenie. Kontrol' = Measurement. Monitoring. Management. Control*. 2017;(1):20–28. (In Russ.)
7. Musaev R.Sh., Trofimov A.A., Frolov M.A. Simulation modeling of a sensitive element of a strain-resistant absolute pressure sensor. *Izmerenie. Monitoring. Upravlenie. Kontrol' = Measurement. Monitoring. Management. Control*. 2012;(2):51–55. (In Russ.)

## Информация об авторах / Information about the authors

**Вадим Сергеевич Волков**

кандидат технических наук, доцент,  
доцент кафедры приборостроения,  
Пензенский государственный университет  
(Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)  
E-mail: vadimv\_1978@mail.ru

**Vadim S. Volkov**

Candidate of technical sciences, associate professor,  
associate professor of the sub-department  
of instrument engineering,  
Penza State University  
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

**Сергей Николаевич Базыкин**

доктор технических наук, доцент,  
заведующий кафедрой приборостроения,  
Пензенский государственный университет  
(Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)  
E-mail: cbazykin@yandex.ru

**Sergey N. Bazykin**

Doctor of technical sciences, associate professor,  
head of the sub-department  
of instrument engineering,  
Penza State University  
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

**Алексей Анатольевич Трофимов**

доктор технических наук, доцент,  
профессор кафедры информационно-  
измерительной техники и метрологии,  
Пензенский государственный университет  
(Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)  
E-mail: alex.t1978@mail.ru

**Aleksei A. Trofimov**

Doctor of technical sciences, associate professor,  
professor of the sub-department of information  
and measuring equipment and metrology,  
Penza State University  
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

**Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов /  
The authors declare no conflicts of interests.**

**Поступила в редакцию / Received 23.05.2024**

**Поступила после рецензирования / Revised 17.06.2024**

**Принята к публикации / Accepted 08.07.2024**