УДК 621.317.2

А. И. Заико

ОПРЕДЕЛЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК ЭРГОДИЧЕСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

A. I. Zaiko

DEFINITION OF ERGODIC RANDOM PROCESSES CHARACTERISTICS

А н н о т а ц и я. Приведены известные и оригинальные способы определения характеристик случайных процессов.

A b s t r a c t. Well known and new definition of random processes characteristics will be found here.

К л ю ч е в ы е   с л о в а: эргодические случайные процессы, определения.

K e y   w o r d s: ergodic random processes, definitions.

Введение

Эргодическое свойство стационарных случайных процессов позволяет находить их вероятностные характеристики по одной реализации $x(t)$ осреднением по времени t, что существенно упрощает эксперимент [1, 2]. Однако практически это свойство используется только для определения математического ожидания m_x, дисперсии D_x и автокорреляционных $R_x(\tau)$ или взаимных корреляционных $R_{xy}(\tau)$ функций по формулам

$$m_x = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)dt;\quad D_x = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left[x(t)-m_x\right]^2 dt;$$

$$R_x(\tau) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left[x(t)-m_x\right]\left[x(t+\tau)-m_x\right]dt;$$

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left[x(t)-m_x\right]\left[y(t+\tau)-m_y\right]dt,$$

где τ – сдвиг во времени между соответственно двумя сечениями $x(t)$ и $x(t+\tau)$ процесса, а также реализациями $x(t)$ и $y(t+\tau)$ совместно эргодических процессов: m_y – математическое ожидание второго процесса, реализация которого $y(t)$. Распределения вероятностей, плотностей вероятностей и их характеристические функции с применением эргодического свойства до настоящего времени не находили.

В статье обобщаются известные и введенные автором определения этих характеристик, приводятся рекомендации по выбору и точности алгоритмов для их измерения с применением комплексного подхода к их определению [2, 3].

Определение характеристик

Одномерное распределение вероятности $W_1[X]$ выражается через одномерную плотность распределения вероятности $w_1[X]$ и определено выражением [2, 4]

$$W_1[X]=\int_{-\infty}^{X} w_1[Z]dZ=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}1\left[X-x(t)\right]dt, \tag{1}$$

где $1\left[X-x(t)\right]=\begin{cases}0, & X<x(t)\\ 1, & X>x(t)\end{cases}$ – единичная функция [5]; $2T$ – длительность реализации $x(t)$.

Аналогично определяется двумерное распределение вероятности $W_2[X_1;X_2,\tau]$ через соответствующую плотность распределения вероятности $w_2[X_1;X_2,\tau]$ в виде [2, 4]

$$W_2[X_1;X_2,\tau]=\int_{-\infty}^{X_1}\int_{-\infty}^{X_2} w_2[Z_1;Z_2,\tau]dZ_1dZ_2=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}1\left[X_1-x(t)\right]1\left[X_2-x(t+\tau)\right]dt. \tag{2}$$

Наконец, n-мерное распределение вероятности $W_n[X_1;X_2,\tau_{12};...;X_n,\tau_{1n}]$ определяется следующим образом [2, 4]:

$$\begin{aligned}W_n[X_1;X_2,\tau_{12};...;X_n,\tau_{1n}]&=\int_{-\infty}^{X_1}...\int_{-\infty}^{X_n} w_n[Z_1;Z_2,\tau_{12};...;Z_n,\tau_{1n}]dZ_1...dZ_n=\\ &=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}1\left[X_1-x(t)\right]1\left[X_2-x(t+\tau_{12})\right]...1\left[X_n-x(t+\tau_{1n})\right]dt,\end{aligned} \tag{3}$$

где $\tau_{1i}=t_i-t_1$ – временной сдвиг между первым и i-м сечениями процесса, $i=2,3,...,n.$

Двумерное взаимное распределение вероятности $W_2[X;Y,\tau]$ совместно эргодических процессов с реализациями $x(t)$ и $y(t+\tau)$ выражается через двумерную взаимную плотность распределения вероятности $w_2[X;Y,\tau]$ и равно [2, 4]

$$W_2[X;Y,\tau]=\int_{-\infty}^{X}\int_{-\infty}^{Y} w_2[Z;H,\tau]dZdH=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}1\left[X-x(t)\right]1\left[Y-y(t+\tau)\right]dt. \tag{4}$$

Точно так же определяются взаимные распределения вероятности и большей размерности.

Одномерная плотность вероятности $w_1[X]$ находится из определения (1) и равна [2, 4]

$$w_1[X]=\frac{dW_1[X]}{dX}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\delta\left[X-x(t)\right]dt, \tag{5}$$

где $\delta\left[X-x(t)\right]=\begin{cases}\infty, & X=x(t)\\ 0, & X\neq x(t)\end{cases}$ – дельта-функция Дирака, которая связана с единичной функцией $1\left[X-x(t)\right]$ следующими соотношениями [5]:

$$\delta\left[X-x(t)\right]=\frac{d1\left[X-x(t)\right]}{dX} \text{ и } 1\left[X-x(t)\right]=\int_{-\infty}^{X}\delta\left[Y-x(t)\right]dY.$$

Двумерная плотность распределения вероятности $w_2[X_1;X_2,\tau]$ находится из выражения (2) и равна [2, 4]

$$w_2[X_1; X_2, \tau] = \frac{d^2 W_2[X_1; X_2, \tau]}{dX_1 dX_2} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \delta\left[X_1 - x(t)\right] \delta\left[X_2 - x(t+\tau)\right] dt,$$

а n-мерная плотность распределения вероятности $w_n[X_1; X_2, \tau_{12}; ...; X_n, \tau_{1n}]$ – из (3) [2, 4]:

$$w_n[X_1; X_2, \tau_{12}; ...; X_n, \tau_{1n}] = \frac{d^n W_1[X_1; X_2, \tau_{12}; ...; X_n, \tau_{1n}]}{dX_1 ... dX_n} =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \delta\left[X_1 - x(t)\right] \delta\left[X_2 - x(t+\tau_{12})\right] ... \delta\left[X_n - x(t+\tau_{1n})\right] dt.$$

Двумерная взаимная плотность распределения вероятности $w_2[X; Y, \tau]$ совместно эргодических процессов согласно (4) равна [2, 4]

$$w_2[X; Y, \tau] = \frac{d^2 W_2[X; Y, \tau]}{dX dY} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \delta\left[X - x(t)\right] \delta\left[Y - y(t+\tau)\right] dt. \tag{6}$$

Одномерная характеристическая функция $\theta_1[j\nu]$ согласно (5) равна [2, 4]

$$\theta_1[j\nu] = \int_{-\infty}^{\infty} w_1[X] e^{j\nu X} dX = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} e^{j\nu x(t)} dt.$$

Аналогично определяется n-мерная характеристическая функция $\theta_n[j\nu_1; j\nu_2, \tau_{12}; ...; j\nu_n, \tau_{1n}]$ [2, 4]:

$$\theta_n[j\nu_1; j\nu_2, \tau_{12}; ...; j\nu_n, \tau_{1n}] = \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} w_n[X_1; X_2, \tau_{12}; ...; X_n, \tau_{1n}] \times$$

$$\times e^{j(\nu_1 X_1 + \nu_2 X_2 + \dots + \nu_n X_n)} dX_1 ... dX_n = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} e^{j\left[\nu_1 x(t) + \nu_2 x(t+\tau_{12}) + \dots + \nu_n x(t+\tau_{1n})\right]} dt.$$

Двумерная взаимная характеристическая функция $\theta_2[j\nu; j\eta, \tau]$ совместно эргодических процессов вводится аналогично и с учетом (6) равна

$$\theta_2[j\nu; j\eta, \tau] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w_2[X; Y, \tau] e^{j(\nu X + \eta Y)} dX dY = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} e^{j\left[\nu x(t) + \eta y(t+\tau)\right]} dt.$$

Введенные определения распределений позволили получить с их помощью известные и приведенные во введении статьи определения вероятностных характеристик случайных процессов [6, 7]. Так, математическое ожидание

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} X w_1[X] dX = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t) dt;$$

дисперсия

$$D_x = \int_{-\infty}^{\infty} (X - m_x)^2 w_1[X] dX = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left[x(t) - m_x\right]^2 dt;$$

корреляционная функция

$$R_x(\tau) = \int \int_{-\infty}^{\infty} (X_1 - m_x)(X_2 - m_x) w_2[X_1; X_2, \tau] dX_1 dX_2 =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left[x(t) - m_x\right]\left[x(t+\tau) - m_x\right] dt;$$

взаимная корреляционная функция двух совместно эргодических процессов

$$R_{xy}(\tau)=\int\int\limits_{-\infty}^{\infty}(X-m_x)(Y-m_y)w_2[X;Y,\tau]dXdY=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}[x(t)-m_x][y(t+\tau)-m_y]\,dt.$$

Вытекающие из них спектральные характеристики случайного процесса определяются следующим образом:

– спектральная плотность мощности:

$$S_x(\omega)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}B_x(\tau)\,e^{-j\omega\tau}d\tau=\int\limits_{-\infty}^{\infty}R_x(\tau)\,e^{-j\omega\tau}d\tau+m_x^2 2\pi\delta(\omega);$$

– взаимная спектральная плотность мощности двух процессов:

$$S_{xy}(\omega)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}B_{xy}(\tau)\,e^{-j\omega\tau}d\tau=\int\limits_{-\infty}^{\infty}R_{xy}(\tau)\,e^{-j\omega\tau}d\tau+m_x m_y 2\pi\delta(\omega).$$

Алгоритмы измерения характеристик и их погрешности

Реальные алгоритмы измерения отличаются от рассмотренных выше определений характеристик случайных процессов конечной длительностью $2T$ и погрешностью измерения реализации $x(t)$. Поэтому результатами измерений являются оценки характеристик, неточность которых характеризуется математическими ожиданиями и ковариационными функциями их погрешностей. Они получены для аналоговых и цифровых измерений с помощью комплексного подхода к определению погрешностей, который рассматривает погрешность измерения как единое и неделимое целое, не требует суммирования элементарных погрешностей, учитывающих порознь все влияющие на неточность измерения факторы [8]. Так, при аналоговых измерениях погрешность учитывает конечную длительность реализации и погрешность ее измерения. При цифровых измерениях длительность измерения дискретна и кратна количеству шагов равномерной дискретизации. Кроме них, на неточность цифровых измерений характеристик влияют погрешности квантования по уровню и алгоритмы восстановления сигнала между отсчетами. Оценки измеряемых характеристик и характеристики погрешностей аналоговых и цифровых измерений при комплексном подходе к их определению подробно рассмотрены в [2, 3].

Апробация и внедрение

Приведенные результаты исследований апробировались на всемирных, международных и всероссийских форумах. Они вошли в учебную литературу, сопровождаются комплексом учебно-исследовательских лабораторных работ и используются при обучении студентов и аспирантов, а также проведении научных и практических исследований [2, 9–13].

Выводы

Введенные определения распределений вероятностей и плотностей распределений вероятностей существенно расширяют возможности описания эргодических случайных процессов. Они позволяют не только получить с их помощью известные моментные характеристики случайных процессов, но и ввести характеристические функции, которые для описания эргодических процессов практически не применялись. Полученные на основе комплексного подхода математические ожидания и корреляционные функции погрешностей результатов измерений позволяют адекватно учесть влияние конечной длительности реализации и погрешностей отсчетов для аналоговых и цифровых измерений. Они исключают суммирование элементарных погрешностей, учитывающих порознь конечную длительность реализации, погрешность отсчетов и влияние дискретизации во времени.

Список литературы

1. ГОСТ 21878–76. Случайные процессы и динамические системы. Термины и определения. – М. : Изд-во стандартов, 1976.– 30 с.
2. Заико, А. И. Случайные процессы. Модели и измерения : учеб. пособие / А. И. Заико. – М. : МАИ, 2006. – 297 с.
3. 72200700005 Случайный процесс с равномерным законом распределения. Математическая модель / А. И. Заико. – Зарег. 28.02.07 г.
4. Заико, А. И. Определения и алгоритмы измерения характеристик эргодических случайных процессов / А. И. Заико // Метрология. – 2003. – № 4.– С. 3–5.
5. Левин, Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники / Б. Р. Левин. – М. : Сов. радио, 1974. – Кн. 1. – 552 с.
6. Грибанов, Ю. И. Погрешности и параметры цифрового спектрально-корреляционного анализа / Ю. И. Грибанов, В. Л. Мальков. – М. : Радио и связь, 1984. – 160 с.
7. Ланге, Ф. Г. Статистические аспекты построения измерительных систем / Ф. Г. Ланге. – М. : Радио и связь, 1981. – 168 с.
8. Заико, А. И. Комплексный подход к определению погрешностей / А. И. Заико // Датчики и системы (ИКА). – 2007. – № 8 (99). – С. 52–59.
9. Заико, А. И. Виртуальные учебно-исследовательские лабораторные работы / А. И. Заико // Современные технологии обучения : материалы VI Междунар. конф. – СПб. : Санкт-Петербург. гос. электротехн. ун-т, 2000. – Ч. 1. – С. 136–138.
10. Электрические сигналы : метод. указания к выполнению виртуальных учебно-исследовательских лабораторных работ / сост. А. И. Заико. – Уфа : Уфимск. гос. авиац. техн. ун-т, 2001. – 35 с.
11. Zaiko, A. I. Accuracy of statistic and spectral Measurement / A. I. Zaiko, N. A. Zaiko // XVII IMEKO World Congress 2003: Proc. – Dubrovnik : HMD Croatian Metrology Society, IMEKO, 2003.– P. 1275–1279.
12. Zaiko, A. Complex Approach to the Definition of Measurement Errors / A. Zaiko, T. Zaiko // Proc. 10^{th} IMEKO TC7 Int. Symp. on «Advances of Measurement Science». – Saint–Petersburg, 2004. – V. 1. – P. 149–152.
13. Заико, А. И. Эргодические случайные процессы. Определения и алгоритмы измерения характеристик / А. И. Заико // Вестник УГАТУ. – 2012. – Т. 16, № 2 (47). – С. 67–70.

Заико Александр Иванович
доктор технических наук, профессор,
кафедра теоретических основ электротехники,
Уфимский государственный
авиационный технический университет
E-mail: zaiko@ugatu.ac.ru

Zaiko Aleksandr Ivanovich
doctor of technical sciences, professor,
sub-department of theoretical fundamentals
of electrical engineering,
Ufa State Aviation Technical University

УДК 621.317.2

Заико, А. И.

Определения характеристик эргодических случайных процессов / А. И. Заико // Измерение. Мониторинг. Управление. Контроль. – 2012. – № 2. – С. 30–34.