

# ИНФОРМАЦИОННО-ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ И УПРАВЛЯЮЩИЕ СИСТЕМЫ

## INFORMATION-MEASURING AND CONTROL SYSTEMS

УДК 681.518.3

doi: 10.21685/2307-5538-2024-2-1

### ОЦЕНКА АДЕКВАТНОСТИ МОДЕЛИ ЛОТКИ – ВОЛЬТЕРРА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЭКОЛОГИЧЕСКОГО БЛАГОПОЛУЧИЯ ЧЕЛОВЕКА

О. Е. Безбородова<sup>1</sup>, О. Н. Бодин<sup>2</sup>, К. Д. Мишина<sup>3</sup>, Д. В. Новиков<sup>4</sup>, Д. В. Мартынов<sup>5</sup>

<sup>1,2,3,4</sup> Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

<sup>2,5</sup> Пензенский государственный технологический университет, Пенза, Россия

<sup>1</sup> oxana243@yandex.ru, <sup>2</sup> bodin\_o@inbox.ru, <sup>3,4,5</sup> ot@pnzgu.ru

**Аннотация.** *Актуальность и цели.* Использование математики в сфере экологической безопасности имеет давние корни. Наиболее известной математической моделью в экологии является модель Лотки – Вольтерра, описывающая взаимоотношения между хищником и жертвой в естественной экосистеме. Авторами предложена усовершенствованная трехэлементная модель Лотки – Вольтерра, учитывающая взаимодействие трех элементов территориальной техносферы: человека, окружающей среды и объекта техносферы. Целью исследования является проверка адекватности усовершенствованной модели Лотки – Вольтерра процессу взаимодействия элементов в территориальной техносфере. Проверка адекватности модели формулируется как задача проверки предположения о том, что значение отклика модели отличается от реального отклика системы не более чем на заданную величину. Объектом исследования является усовершенствованная модель Лотки – Вольтерра, учитывающая взаимодействие человека, окружающей среды и объекта техносферы. *Материалы и методы.* Исследование проведено с использованием комплексного системного подхода и методов анализа и синтеза, группировки и обобщения. *Результаты.* Из всех проанализированных критериев адекватности модели существует критерий согласия  $\chi^2$  Пирсона, критерий Смирнова – Колмогорова, критерий Фишера (Фишера – Снедекора), наиболее предпочтительным является критерий Фишера, так как подходит для сравнения очень малых выборок, бывает односторонним и двусторонним. *Выводы.* Усовершенствованная математическая модель Лотки – Вольтерра, описывающая взаимодействие элементов в территориальной техносфере, адекватно отображает состояние территориальной техносферы при прогнозировании и по абсолютным значениям факторов риска.

**Ключевые слова:** математическая модель, уравнение Лотки – Вольтерра, моделирование, прогнозирование, адекватность, F-критерий Фишера

**Для цитирования:** Безбородова О. Е., Бодин О. Н., Мишина К. Д., Новиков Д. В., Мартынов Д. В. Оценка адекватности модели Лотки – Вольтерра для определения экологического благополучия человека // Измерение. Мониторинг. Управление. Контроль. 2024. № 2. С. 5–13. doi: 10.21685/2307-5538-2024-2-1

### ASSESSMENT OF THE ADEQUACY OF THE LOTKA – VOLTERRA MODEL FOR DETERMINING HUMAN ECOLOGICAL WELL-BEING

O.E. Bezborodova<sup>1</sup>, O.N. Bodin<sup>2</sup>, K.D. Mishina<sup>3</sup>, D.V. Novikov<sup>4</sup>, D.V. Martynov<sup>5</sup>

<sup>1,2,3,4</sup> Penza State University, Penza, Russia

<sup>2,5</sup> Penza State Technological University, Penza, Russia

<sup>1</sup> oxana243@yandex.ru, <sup>2</sup> bodin\_o@inbox.ru, <sup>3,4,5</sup> ot@pnzgu.ru

**Abstract.** *Background.* The use of mathematics in the field of environmental safety has long roots. The most famous mathematical model in ecology is the Lotka – Volterra model, which describes the relationship between predator and

prey in a natural ecosystem. The authors proposed an improved three-element Lotka – Volterra model that takes into account the interaction of three elements of the territorial technosphere: a person, the environment, and an object of the technosphere. The aim of the study is to test the adequacy of the improved Lotka – Volterra model to the process of interaction of elements in the territorial technosphere. Model adequacy testing is formulated as the task of testing the assumption that the value of the model response differs from the real response of the system by no more than a given value. The object of the study is the improved Lotka – Volterra model, which takes into account the interaction of man, the environment and the object of the technosphere. *Materials and methods.* The study was carried out using an integrated systematic approach and methods of analysis and synthesis, grouping and generalization. *Results.* Of all the analyzed criteria for the adequacy of the model, there is Pearson's  $\chi^2$  goodness-of-fit test, Smirnov – Kolmogorov's test, Fisher's (Fischer – Snedecor's) test, Fisher's test is the most preferable, since it is suitable for comparing very small samples, it can be one-sided and two-sided. *Conclusions.* The improved Lotka – Volterra mathematical model describing the interaction of elements in the territorial technosphere adequately reflects the state of the territorial technosphere in forecasting and in terms of the absolute values of risk factors.

**Keywords:** mathematical model, Lotka – Volterra equation, modeling, forecasting, adequacy, Fisher F-criterion

**For citation:** Bezborodova O.E., Bodin O.N., Mishina K.D., Novikov D.V., Martynov D.V. Assessment of the adequacy of the Lotka – Volterra model for determining human ecological well-being. *Izmerenie. Monitoring. Upravlenie. Kontrol' = Measuring. Monitoring. Management. Control.* 2024;(2):5–13. (In Russ.). doi: 10.21685/2307-5538-2024-2-1

### *Постановка проблемы*

Использование математики в сфере экологической безопасности имеет давние корни. Уже в пятидесятых годах двадцатого века основоположник современной экологии Ю. Одум в работе [1] доказал важность и необходимость применения математического моделирования в области экологии, охраны окружающей среды и использования природных ресурсов.

Математическое моделирование требовалось для получения данных о динамике изменения исследуемых природных объектов под воздействием объектов техносферы. Получение экспериментальных данных об этих объектах затруднено из-за растянутости во времени базовых процессов, их труднодоступности, опасности для персонала, проводящего исследование, в некоторых случаях вообще невозможности проведения натурных экспериментов, например, при исследовании воздействия химического загрязнения окружающей среды на здоровье человека.

Полученные в результате математического моделирования данные необходимы для прогнозирования изменения состояния территориальной техносферы и обоснованного принятия хозяйственных решений.

Наиболее известной математической моделью в экологии является модель Лотки – Вольтерра, описывающая взаимоотношения между хищником и жертвой в естественной экосистеме. Несмотря на ее первоначальную узкую направленность, с течением времени ее стали широко применять в различных областях науки [2].

Авторами предложена усовершенствованная трехэлементная модель Лотки – Вольтерра, учитывающая взаимодействие трех элементов территориальной техносферы: человека, окружающей среды и объекта техносферы [3, 4].

Предложенная модель использована для моделирования и прогнозирования изменения экологического благополучия человека в территориальной техносфере. Она позволяет комплексно оценить динамику процессов взаимодействия элементов в территориальной техносфере, понять, необходимо ли осуществлять корректирующие мероприятия (лечебно-профилактические, природоохранные, технологические). Для имитационного моделирования авторы использовали пакет *MatLab/Simulink*.

Качество любой математической модели оценивается величиной расхождений на участке аппроксимации (построения модели) между фактическими и расчетными значениями и определяется ее *адекватностью* исследуемому процессу и характеризуется наличием определенных статистических свойств.

**Целью исследования** является проверка адекватности усовершенствованной модели Лотки – Вольтерра процессу взаимодействия элементов в территориальной техносфере.

Проверка адекватности модели формулируется как **задача** проверки предположения о том, что значение отклика модели отличается от реального отклика системы не более чем на заданную величину.

**Объектом исследования** является усовершенствованная модель Лотки – Вольтерра, учитывающая взаимодействие человека, окружающей среды и объекта техносферы.

Исследование проведено с использованием комплексного системного подхода и методов анализа и синтеза, группировки и обобщения.

*Материалы и методы*

Перед началом использования разработанной математической модели необходимо убедиться в том, что она соответствует описываемому ею объекту, процессу или явлению, т.е. массив данных, полученных при исследовании модели, будет незначительно отличаться от данных, полученных при экспериментальном исследовании.

Исследование новой математической модели проводят сравнением данных, полученных на модели, с данными натуральных экспериментов или данными, полученными на уже существующих математических моделях, хорошо зарекомендовавших себя в процессе исследования. Эти способы проверки математической модели называют проверкой экспериментом (первый вариант) и проверкой тестированием (второй вариант).

Адекватность математической модели характеризуется ее соответствием моделируемому объекту, процессу или явлению. Но в этом случае имеется в виду не абсолютное соответствие свойств модели и объекта, соответствие по выбранному свойству или совокупности свойств являющихся важным. Чаще всего таким свойством выбирают точность и задают для нее граничные значения. Под точностью понимают степень совпадения значений выходных параметров математической модели и моделируемого объекта.

Общеизвестно, что точность зависит от условий, в которых находится исследуемый объект, т.е. от условий внешней среды. В этой внешней среде, характеризуемой совокупностью параметров, необходимо выделить область, в которой математическая модель будет считаться адекватной и погрешность меньше заданной.

Нахождение этой области по одному или по совокупности параметров, с одной стороны, – сложная процедура, требующая больших вычислительных затрат. С другой стороны, разработано большое количество математических методов, позволяющих определить адекватность математических моделей.

При наличии достоверных данных (экспериментальных или расчетных) проверку адекватности новой математической модели можно провести, используя методы математической статистики [5]. Для достижения цели – оценки адекватности математической модели – необходимо определить, на какую величину отличаются данные, полученные с использованием новой математической модели  $W_m$ , от данных, полученных в ходе натурального эксперимента  $W$ . Чаще всего это значение  $\varepsilon^*$  задается для каждой модели. И задача оценки адекватности математической модели определяется следующим образом:

$$|W(x) - W_m| = |\varepsilon| \leq \varepsilon^* \quad (1)$$

Но данные натурального эксперимента  $\tilde{W}$  не предсказуемы из-за наличия большого количества факторов, действующих во внешней среде. Они могут изменяться из-за неконтролируемого дрейфа параметров исследуемого объекта, разброса характеристик его элементов, ошибок измерения и отличаться от  $W$ . Поэтому при сравнении результатов математического моделирования и натурального эксперимента будет получено множество значений  $\{\varepsilon_i\}$ , зависящее от комплекса случайных величин

$$\tilde{W}_i(x) - W_m(x) = \varepsilon_i, \quad (2)$$

где  $i$  – количество данных, изменяющееся от 1 до  $n$ , среди которых будут значения  $\varepsilon_i > \varepsilon^*$ ,  $\varepsilon_i < \varepsilon^*$  и  $\varepsilon_i = \varepsilon^*$ .

Для выяснения причин возникновения и значимости этих отклонений, используя множество значений  $\{\varepsilon_i\}$ , рассчитывают статистические критерии для оценки адекватности математической модели.

При оценке адекватности математической модели рассматривают две взаимоисключающие гипотезы  $H_0$  и  $H_1$ . Гипотеза  $H_0$  – это утверждение, что математическая модель адекватна исследуемому объекту при заданных условиях. Гипотеза  $H_1$ , соответственно, является альтернативной.

Исходя из того, что множество  $\{\varepsilon_i\}$  случайно, подтверждение истинности каждой из гипотез имеет вероятностный характер. И при анализе результатов можно допустить ошибку и выбрать неправильную модель или отказаться от истинной. Вероятность ошибочного отказа от

истинной модели обозначают  $a$ , вероятность ошибочного принятия неправильной модели –  $b$ . Эти вероятности имеют обратную зависимость, но в любом случае их необходимо минимизировать. При проверке адекватности модели параметр  $a$  выбирают из множества значений  $a = \{0,05; 0,01; 0,005; 0,001\}$  и при этом во всех случаях правильная математическая модель отвергается.

Параметр  $1-b$  показывает вероятность неиспользования неадекватной математической модели и его называют мощностью критерия адекватности, так как он является мерой его эффективности.

Для оценки адекватности модели взаимодействия элементов территориальной техно-сферы могут быть использованы хорошо известные и зарекомендовавшие себя математические способы.

К ним относят критерии Пирсона ( $c^2$ ), Смирнова – Колмогорова ( $\lambda$ ), Фишера (Фишера – Снедекора) ( $F$ ) [5].

Каждый из этих критериев имеет свою область применения и именно в ней дает хорошие результаты.

**По критерию  $c^2$  Пирсона** адекватность математической модели исследуемой системе определяют с заданной вероятностью  $p$ , т.е. при  $n$  экспериментах  $np = n_1$  значений параметра  $\varepsilon_i$  будет удовлетворять выражению (1), т.е. показано, что математическая модель адекватна системе. И наоборот, только  $(1-p)n = n_2$  значений проиллюстрируют неадекватность исследуемой математической модели. Все результаты эксперимента будут разделены на две группы: подтверждающий адекватность математической модели с частотой  $n_1$  и не подтверждающие – с частотой  $n_2$ . И эти частоты будут связаны выражениями

$$\begin{aligned} n_1 &\gg pn, \\ n_2 &\gg (1-p)n, \\ n_1 + n_2 &= n. \end{aligned} \quad (3)$$

Значения  $n_1$  и  $n_2$  могут не соответствовать точным значениям вероятностных оценок в двух случаях:

- математическая модель не адекватна системе, т.е. вероятность  $p$  задана не верно;
- наличие случайных отклонений.

Для исключения второго варианта, выяснения случайности отклонения  $n_1$  и  $n_2$  от соответствующих вероятностей, рассчитывают параметр

$$U^* = \frac{(v_1 - pn)^2}{pn} + \frac{[v_2 - (1-p)n]^2}{(1-p)n}. \quad (4)$$

Эта функция является суммой квадратов отклонений, отнесенных к соответствующим вероятностям.

Рассчитанное по формуле (4) значение сравнивают с табличными критическими значениями критерия Пирсона для заданного уровня риска  $a$ .

Если рассчитанное значение превышает табличное, то делают вывод о неадекватности математической модели, т.е. верна гипотеза  $H_1$ .

Если рассчитанное значение не превышает табличное, то делают вывод о том, что отклонения случайны и математическая модель адекватна, т.е. верна гипотеза  $H_0$ .

Заключение о неадекватности модели не всегда требует отказа от ее использования. Можно изменить исходные данные для проверки адекватности и провести проверку еще раз. К варьируемым в этом случае данным относят интервал изменения определяемого параметра  $\pm \varepsilon^*$  и доверительную вероятность  $p$ . Интервал увеличивают, а вероятность уменьшают. В этом случае уменьшаются частоты  $n_1$  и  $n_2$  и расчет по формуле (4), с последующим сравнением с табличными значениями покажет адекватность математической модели. Но в таком случае нужно помнить, что точность модели будет меньше, чем задано изначально.

Кроме этого, можно уменьшить задаваемую в исходных данных для моделирования величину вероятности ошибочного отказа от истинной модели. Как следствие, увеличится критерий  $c_{1,a}^2$  Пирсона, а также то, что будет признано адекватной исследуемой математической моделью.

Также можно увеличить объем анализируемых данных, если это возможно. В наличие имеются большие массивы экспериментальных и теоретических данных, но это не всегда возможно из-за ограниченности информации об исследуемых объектах, процессах, явлениях.

Если в результате анализа адекватности по критерию  $c^2$  Пирсона будет получено, что  $U > c_{1,a}^2$ , то отсюда следует, что доверительный интервал слишком велик и его необходимо уменьшить, либо занижена доверительная вероятность  $p$  и ее необходимо увеличить. Исходя из этого, можно сделать вывод, что математическая модель оказалась точнее, чем предполагали.

Недостатком критерия  $c^2$  Пирсона является относительно большой объем данных для анализа. Необходимо иметь как минимум 20 значений.

**Критерий Смирнова – Колмогорова** (критерий согласия или  $\lambda$ -критерий) предназначен для сопоставления двух выборок значений с целью нахождения точки, в которой расхождение между ними является наибольшим, и оценки достоверности этого расхождения. Сопоставление может быть проведено как между двумя экспериментальными выборками, так и между экспериментальной и теоретически составленной выборками.

$\lambda$ -критерий основан на нахождении максимального значения отклонения между двумя сопоставляемыми выборками

$$S = \sup\{\varepsilon_i\} = \sup\{\tilde{W}_i - W_{mi}\}. \quad (5)$$

Для каждой пары выборок строится вспомогательная функция, вычисляемая как отношение максимальной разности (без учета знака) между значениями накопленных частот двух выборок ( $d_{max}$ ) к корню квадратному из численности выборки ( $n$ ):

$$\lambda_n^* = \frac{d_{max}}{\sqrt{n}}. \quad (6)$$

Результат расчета по формуле (6) сравнивается с табличным значением  $\lambda_{n,a}$   $\lambda$ -функции Смирнова – Колмогорова.

Если рассчитанное значение  $\lambda$ -функции Смирнова – Колмогорова больше заданного в таблице – математическая модель признается неадекватной.

Если рассчитанное значение  $\lambda$ -функции Смирнова – Колмогорова меньше или равно табличному значению, то математическая модель признается адекватной.

Этот критерий используют при недостаточном количестве данных об исследуемом объекте (меньше 20 значений).

Недостатком критерия Смирнова – Колмогорова является требование упорядоченности значений сопоставляемых выборок, т.е. каждая из них должна быть сформирована либо по нарастанию, либо по убыванию анализируемого параметра, но в любом случае это однонаправленное его изменение.

Для использования  $F$ -критерия Фишера должны быть выполнены условия, заключающиеся в том, что сопоставляемые значения:

- должны быть представлены в номинальной шкале;
- иметь только два значения.

Неоспоримым достоинством  $F$ -критерия Фишера является его применимость к малым выборкам, когда весь массив анализируемых данных  $n \leq 10$  значений. Такой объем выборки не позволяет использовать критерий  $c^2$  Пирсона.

Точный критерий Фишера бывает односторонним и двусторонним. При одностороннем варианте точно известно, куда отклонится один из показателей. Двусторонний тест является предпочтительным, так как оценивает различия частот по двум направлениям: оценивается вероятность как большей, так и меньшей частоты явления.

Оценка адекватности на основе **критерия Фишера** осуществляется путем анализа дисперсий по формуле

$$F = \frac{S_{\text{факт}}^2}{S_{\text{ост}}^2}, \quad (7)$$

где  $S_{\text{факт}}^2$  – факторная дисперсия, определяемая по формуле

$$S_{\text{факт}}^2 = \frac{\sum(\hat{y}_x - \bar{y})^2}{m}, \quad (8)$$

$S_{\text{ост}}^2$  – остаточная дисперсия, определяемая по формуле

$$S_{\text{ост}}^2 = \frac{\sum(y - \hat{y}_x)^2}{n - m - 1}, \quad (9)$$

где  $y$  – измеренное значение анализируемого параметра;  $\bar{y}$  – среднее арифметическое значение измеряемого параметра;  $n$  – число наблюдений;  $m$  – число параметров при переменной  $x$ ;  $x$  – количество факторов в модели регрессии.

В зависимости от типа исследуемой модели регрессии применяемая формула определения  $F$ -критерия Фишера может меняться. Для расчета  $F$ -критерия Фишера для парной линейной регрессии формула (7) примет вид

$$F = \frac{S_{\text{факт}}^2}{S_{\text{ост}}^2} = \frac{\sum(\hat{y}_x - \bar{y})^2}{\sum(y - \hat{y}_x)^2} (n - 2). \quad (10)$$

При использовании коэффициента детерминации расчет  $F$ -критерия Фишера для парной линейной регрессии *по коэффициенту детерминации* формула (7) примет вид

$$F = \frac{r_{xy}^2}{1 - r_{xy}^2} (n - 2), \quad (11)$$

где  $r_{xy}^2$  – коэффициент детерминации.

Для парной нелинейной регрессии расчет  $F$ -критерия Фишера проводят по *индексу детерминации* и тогда формула (7) примет вид

$$F = \frac{\rho_{xy}^2}{1 - \rho_{xy}^2} \frac{n - m - 1}{m}, \quad (12)$$

где  $\rho_{xy}^2$  – индекс детерминации.

Для уравнений множественной регрессии  $F$ -критерия Фишера рассчитывают по формуле

$$F = \frac{S_{\text{факт}}^2}{S_{\text{ост}}^2} = \frac{k_{\text{кор}}^2}{1 - k_{\text{кор}}^2} \frac{n - m - 1}{m}, \quad (13)$$

где  $k_{\text{кор}}^2$  – коэффициент корреляции.

В процессе исследования уравнения множественной регрессии кроме общего  $F$ -критерия Фишера могут быть рассчитаны частные  $F$ -критерии. В случае анализа уравнения с двумя регрессорами (переменными) вычисление частных  $F$ -критериев Фишера может быть выполнено по формулам

$$F_{x_1} = \frac{R_{yx_1x_2}^2 - r_{yx_2}^2}{1 - R_{yx_1x_2}^2} (n - 3), \quad F_{x_2} = \frac{R_{yx_1x_2}^2 - r_{yx_1}^2}{1 - R_{yx_1x_2}^2} (n - 3). \quad (14)$$

Для определения статистической значимости рассчитанного значения  $F$ -критерия Фишера его сравнивают с критическими или табличными значениями. При этом табличные значения определяются на основе числа наблюдений, степеней свободы и заданного уровня значимости как  $F_{\text{табл}}(a, k_1, k_2)$ , где  $k_1 = m$  – количество факторов в построенной регрессионной модели,  $k_2 = n - m - 1$ , где  $n$  – число наблюдений.

Интерпретация  $F$ -критерия Фишера осуществляется следующим образом. Если рассчитанная величина  $F_{x_i}$  превышает критическое или табличное значение, то дополнительное включение фактора  $x_i$  в регрессионную модель статистически оправдано и коэффициент регрессии  $b_i$  при соответствующем факторе  $x_i$  статистически значим.

Если рассчитанная величина  $F_{x_i}$  меньше критического или табличного значения, то дополнительное включение фактора  $x_i$  в регрессионную модель статистически не оправдано, так как данные фактор и коэффициент регрессии  $b_i$  при нем являются статистически незначимыми.

**Результаты исследования**

Оценка точности прогнозирования состояния территориальной техносферы при оценке экологического благополучия человека проведена в работе [6]. Результаты этих исследований используем для оценки адекватности усовершенствованной модели Лотки – Вольтерра.

Учитывая, что и территориальная техносфера и каждый из ее элементов являются многопараметрическими объектами, для проверки адекватности модели территориальной техносферы на основе системы дифференциальных уравнений Лотки – Вольтерра используем формулу  $F$ -критерия Фишера для множественной нелинейной регрессии и проведем расчет  $F$ -критерия Фишера по коэффициенту детерминации.

Исходя из этого, получаем значения  $F$ -критерия Фишера, приведенные в табл. 1.

Таблица 1

Параметры	$k_{дет}^2$	$m$	Рассчитанные значения $F$ -критерия Фишера при различных количествах наблюдений, $n$										
			10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Абсолютные значения факторов риска	0,6331	3	3,45	4,03	4,6	5,18	5,75	6,33	6,9	7,48	8,05	8,63	9,2
Значения риска	0,6333	3	3,45	4,03	4,6	5,18	5,76	6,33	6,91	7,48	8,06	8,64	9,21
Табличные значения $F$ -критерия Фишера			4,76	4,35	4,07	3,86	3,71	3,59	3,49	3,41	3,34	3,29	3,24
Заключение об адекватности модели			-	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+

На рис. 1 приведены зависимости значений  $F$ -критерия Фишера от количества наблюдений.

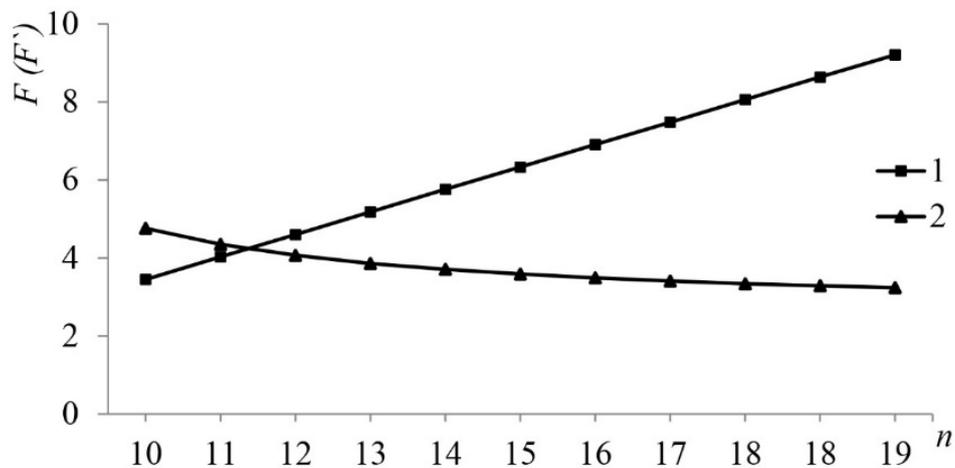


Рис. 1. Динамика адекватности математической модели территориальной техносферы: 1 – зависимость рассчитанных значений  $F$ -критерия Фишера ( $F$ ) от количества наблюдений ( $n$ ); 2 – зависимость табличных значений  $F$ -критерия Фишера ( $F'$ ) от количества наблюдений ( $n$ )

Анализ полученных критериев оценки адекватности усовершенствованной модели Лотки – Вольтерра показывает, что:

- модель адекватна и 95,5 % вариаций абсолютных значений факторов риска и значений риска объясняется вариацией их предшествующих значений;
- модель адекватна начиная с 12 измерений;
- табличное значение  $F$ -критерия Фишера при уровне значимости 0,05 составляет 4,07.

### Заключение

Таким образом, усовершенствованная математическая модель Лотки – Вольтерра, описывающая взаимодействие элементов в территориальной техносфере, адекватно отображает состояние территориальной техносферы при прогнозировании и по абсолютным значениям факторов риска, и по значениям риска имея не менее 12 наблюдений.

### Список литературы

1. Одум Ю. Основы экологии : пер. с 3-го англ. изд. / под ред. и с предисл. д-ра биол. наук Н. П. Наумова. М. : Мир, 1975. 740 с.
2. Титов В. А., Вейнберг Р. Р. Анализ существующих динамических моделей на базе системы уравнений Лотки – Вольтерры «хищник-жертва» // *Фундаментальные исследования*. 2016. № 8-2. С. 409–413.
3. Bezborodova O., Bodin O., Martynov D. Forecasting the state of the environment based on the assessment of technogenic risk // *AIP Conference Proceedings*. 2023. Vol. 2700. P. 050002. doi: 10.1063/5.0127012
4. Безбородова О. Е. Имитационное моделирование взаимодействия человека и объекта техносферы в информационно-измерительных и управляющих системах обеспечения экологического благополучия человека // *Модели, системы, сети в экономике, технике, природе и обществе*. 2023. № 1. С. 164–177. doi: 10.21685/2227-8486-2023-1-11
5. Введение в математическое моделирование : учеб. пособие / под ред. П. В. Трусова. М. : Логос, 2004. 440 с.
6. Безбородова О. Е. Оценка точности прогнозирования состояния территориальной техносферы в информационно-измерительной и управляющей системе обеспечения экологического благополучия человека // *Измерение. Мониторинг. Управление. Контроль*. 2022. № 4. С. 43–50. doi: 10.21685/2307-5538-2022-4-6

### References

1. Odum Yu. *Osnovy ekologii: per. s 3-go angl. izd. = Fundamentals of ecology : trans. from the 3rd English edition*. Moscow: Mir, 1975:740. (In Russ.)
2. Titov V.A., Veynberg R.R. Analysis of existing dynamic models based on the Lotka–Volterra system of equations "predator-prey". *Fundamental'nye issledovaniya = Fundamental research*. 2016;(8-2):409–413. (In Russ.)
3. Bezborodova O., Bodin O., Martynov D. Forecasting the state of the environment based on the assessment of technogenic risk. *AIP Conference Proceedings*. 2023;2700:050002. doi: 10.1063/5.0127012
4. Bezborodova O.E. Simulation modeling of interaction between a person and an object of the technosphere in information-measuring and control systems for ensuring human environmental well-being. *Modeli, sistemy, seti v ekonomike, tekhnike, prirode i obshchestve = Models, systems, and networks in economics, technology, nature, and society*. 2023;(1):164–177. (In Russ.). doi: 10.21685/2227-8486-2023-1-11
5. Trusov P.V. (ed.). *Vvedenie v matematicheskoe modelirovanie: ucheb. posobie = Introduction to mathematical modeling : textbook*. Moscow: Logos, 2004:440. (In Russ.)
6. Bezborodova O.E. Assessment of the accuracy of forecasting the state of the territorial technosphere in the information-measuring and control system for ensuring human environmental well-being. *Izmerenie. Monitoring. Upravlenie. Kontrol' = Measurement. Monitoring. Management. Control*. 2022;(4):43–50. (In Russ.). doi: 10.21685/2307-5538-2022-4-6

### Информация об авторах / Information about the authors

#### Оксана Евгеньевна Безбородова

доктор технических наук, доцент,  
заведующий кафедрой техносферной безопасности,  
Пензенский государственный университет  
(Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)  
E-mail: oxana243@yandex.ru

#### Oksana E. Bezborodova

Doctor of technical sciences, associate professor,  
head of the sub-department of technosphere safety,  
Penza State University  
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

**Олег Николаевич Бодин**

доктор технических наук, профессор,  
профессор кафедры информационно-  
измерительной техники и метрологии,  
Пензенский государственный университет  
(Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40);  
профессор кафедры технического  
управления качеством,  
Пензенский государственный  
технологический университет  
(Россия, г. Пенза, пр-д Байдукова/  
ул. Гагарина, 1а/11)  
E-mail: bodin\_o@inbox.ru

**Oleg N. Bodin**

Doctor of technical sciences, professor,  
professor of the sub-department  
of information-measuring equipment and metrology,  
Penza State University  
(40 Krasnaya street, Penza, Russia);  
professor of the sub-department  
of technical quality management,  
Penza State Technological University  
(1a/11 Baidukova passage/Gagarina street,  
Penza, Russia)

**Кристина Дмитриевна Мишина**

аспирант,  
Пензенский государственный университет  
(Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)  
E-mail: ot@pnzgu.ru

**Kristina D. Mishina**

Postgraduate student,  
Penza State University  
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

**Дмитрий Владимирович Новиков**

аспирант,  
Пензенский государственный университет  
(Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)  
E-mail: ot@pnzgu.ru

**Dmitry V. Novikov**

Postgraduate student,  
Penza State University  
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

**Дмитрий Владиславович Мартынов**

аспирант,  
Пензенский государственный  
технологический университет  
(Россия, г. Пенза, пр-д Байдукова/  
ул. Гагарина, 1а/11)  
E-mail: ot@pnzgu.ru

**Dmitry V. Martynov**

Postgraduate student,  
Penza State Technological University  
(1a/11 Baidukova passage/Gagarina street,  
Penza, Russia)

**Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов /  
The authors declare no conflicts of interests.**

**Поступила в редакцию/Received 27.02.2024**

**Поступила после рецензирования/Revised 20.03.2024**

**Принята к публикации/Accepted 15.04.2024**